

高等数学习题册

v0.2.1

这本书是高等数学习题集（同济大学配套资料，由北京大学出版社出版）的电子化总集版本。

本书大量借助 AI 进行处理，内容提取主要用 MinerU，答案和解析部分主要由 AI 生成，有限的人工校对。

如遇错误、疑惑，欢迎提交 issue 或 pull request 进行讨论、修正。（地址：<https://github.com/xihale/tongji-calculus>）

目录

第一章 函数与极限	7
第一节 映射与函数	7
第二节 数列的极限	9
第三节 函数的极限	11
第四节 无穷小与无穷大	13
第五节 极限运算法则	13
第六节 极限存在准则 两个重要极限	15
第七节 无穷小的比较	17
第八节 函数的连续性与间断点	19
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	20
第十节 闭区间上连续函数的性质	23
总习题一	25
第二章 导数与微分	28
第一节 导数的概念	28
第二节 函数的求导法则	30
第三节 高阶导数	33
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数·相关变化率	35
第五节 函数的微分	39
总习题二	41
第三章 微分中值定理与导数的应用	45
第一节 微分中值定理	45
第二节 洛必达法则	46
第三节 泰勒公式	48
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	50
第五节 函数的极值与最大值最小值	53

第六节 函数图形的描绘	53
第七节 曲率	56
总习题三	57
第四章 不定积分	61
第一节 不定积分的概念与性质	61
第二节 换元积分法(1)	63
第二节 换元积分法(2)	65
第三节 分部积分法	67
第四节 有理函数的积分	69
总习题四	71
第五章 定积分	74
第一节 定积分的概念与性质	74
第二节 微积分基本公式	77
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	79
第四节 反常积分	81
总习题五	83
第六章 定积分的应用	86
第一节 定积分的元素法	86
第二节 定积分在几何学上的应用	86
第三节 定积分在物理学上的应用	89
总习题六	92
第七章 微分方程	95
第一节 微分方程的基本概念	95
第二节 可分离变量的微分方程	95
第三节 齐次方程	99
第四节 一阶线性微分方程	100

第五节 可降阶的高阶微分方程	102
第六节 高阶线性微分方程	104
第七节 常系数齐次线性微分方程	104
第八节 常系数非齐次线性微分方程	107
总习题七	109
第八章 向量代数与空间解析几何	112
第一节 向量及其线性运算	112
第二节 数量积 向量积 混合积	113
第三节 平面及其方程	116
第四节 空间直线及其方程	118
第五节 曲面及其方程	120
第六节 空间曲线及其方程	122
总习题八	125
第九章 多元函数微分法及其应用	130
第一节 多元函数的基本概念	130
第二节 偏导数	131
第三节 全微分	133
第四节 多元复合函数的求导法则	136
第五节 隐函数的求导公式	138
第六节 多元函数微分学的几何应用	141
第七节 方向导数与梯度	143
第八节 多元函数的极值及其求法	146
总习题九	149
第十章 重积分	152
第一节 二重积分的概念与性质	152
第二节 二重积分的计算法 (1)	153

第二节 二重积分的计算法 (2)	155
第三节 三重积分(1)	157
第三节 三重积分(2)	159
第四节 重积分的应用	161
总习题十	164
第十一章 曲线积分与曲面积分	168
第一节 对弧长的曲线积分	168
第二节 对坐标的曲线积分	170
第三节 格林公式及其应用 (1)	173
第三节 格林公式及其应用 (2)	175
第四节 对面积的曲面积分	178
第五节 对坐标的曲面积分	180
第六节 高斯公式 通量与散度	182
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	185
总习题十一	186
第十二章 无穷级数	189
第一节 常数项级数的概念与性质	189
第二节 常数项级数的审敛法 (1)	191
第二节 常数项级数的审敛法 (2)	193
第三节 幂级数	194
第四节 函数展开成幂级数	197
第五节 傅里叶级数	199
第六节 一般周期函数的傅里叶级数	201
总习题十二	202
模拟卷与真题	205
高等数学(上册)期末测试模拟卷(一)	205

高等数学(上册)期末测试模拟卷(二)	209
高等数学(上册)期末测试真题(一)	213
高等数学(上册)期末测试真题(二)	219
高等数学(下册)期末测试模拟卷(一)	225
高等数学(下册)期末测试模拟卷(二)	230
高等数学(下册)期末测试真题(一)	234
高等数学(下册)期末测试真题(二)	239

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、判断题

1. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ 是两个相同的函数 ()
2. $f(x) = 1$, $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$ 是两个相同的函数 ()

二、选择题

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -\sin^3 x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin^3 x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 则此函数是 ()
A. 周期函数 B. 单调增函数
C. 奇函数 D. 偶函数
4. 设函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin^2 x$, 则 $f[g(x)] =$ ()
A. $e^{\sin^2 x}$ B. $\sin^2 e^x$
C. $e^x \sin^2 x$ D. $(\sin^2 x)^{e^{x^2}}$

三、计算题

5. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y = \arctan(x - 3)$;

(2) $y = \sqrt{3 - x} + \arctan \frac{1}{x}$ 。

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = [0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$)。

7. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y = \sin x - \cos x + 1$;

(2) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ 。

四、证明题

8. 设所考虑的函数都定义在区间 $(-l, l)$ 内, 证明:

- (1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;
- (2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

第二节 数列的极限

一、选择题

1. 下列数列 $\{x_n\}$ 中, 收敛的是 ()

- A. $x_n = (-1)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$ B. $x_n = \frac{n}{n+1}$
C. $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ D. $x_n = n - (-1)^n$

2. 下列数列 $\{x_n\}$ 中, 发散的是 ()

- A. $x_n = \frac{1}{2^n}$ B. $x_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n^2}$
C. $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ D. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

二、填空题

3. 设数列 $\{u_n\}$ 的一般项是 $u_n = \frac{3n+1}{2n+1}$, 使不等式 $|u_n - \frac{3}{2}| < 0.01$ 成立的 n 满足 $n \geq$ _____

三、计算题

4. 下列数列是否收敛？若收敛，写出其极限：

(1) $\{(-1)^n n\}$;

(2) $\{[(-1)^n + 1]^{\frac{n+1}{n}}\}$ 。

四、证明题

5. 根据数列极限的定义，证明：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n-3}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$;

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ 。反过来成立吗？成立给出证明，不成立举出反例。

第三节 函数的极限

一、选择题

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = (\quad)$
A. -1 B. 0 C. 1 D. 不存在
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 ()
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 无关条件
- 设函数 $f(x) = \frac{2x+|x|}{4x-3|x|}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (\quad)$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 不存在

二、填空题

- 使当 $0 < |x-3| < \delta$ 时 $|\frac{x^2-9}{x-3} - 6| < \varepsilon$ 成立, 可取 $\delta = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

5. 对于图 1-1 所示的函数 $f(x)$ ，求下列极限；若不存在，说明理由：

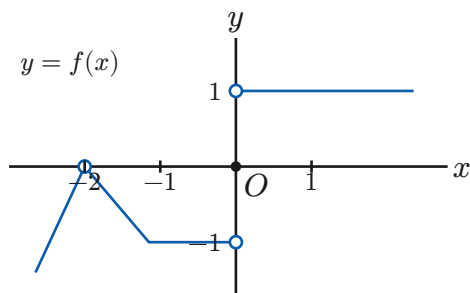


图 1-1

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

6. 求函数 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限，并说明它们当 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在

四、证明题

7. 根据函数极限的定义, 证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2) = 12;$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$

第四节 无穷小与无穷大

本节无题

第五节 极限运算法则

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ 在下列哪个变化过程中为无穷大 ()

A. $x \rightarrow 0$

B. $x \rightarrow 1$

C. $x \rightarrow -1$

D. $x \rightarrow \infty$

二、计算题

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} \circ$$

3. 函数 $y = x \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界? 这个函数是否为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大? 为什么

三、证明题

4. 证明：函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界，但并不是 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷大

第六节 极限存在准则 两个重要极限

一、选择题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = (\quad)$

- A. 1 B. ∞ C. 不存在 D. 0

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} = (\quad)$

- A. $2e$ B. e^{-2} C. e^2 D. $\frac{2}{e}$

二、填空题

3. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^3$, 则 $k =$ _____

4. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$, 则 $a =$ _____

三、计算题

5. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$ (x 为非零常数);

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}};$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx}$ ($k \in \mathbb{N}_+$)。

四、证明题

6. 利用极限存在准则, 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1;$

(2) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$ 的极限存在;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1 + x} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}_+, n \geq 2).$

第七节 无穷小的比较

一、填空题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 是 $x^2 - x^3$ 的_____

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$, 则 a, b 依次为_____;

二、计算题

3. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)(\sqrt{1+\sin x}-1)};$$

4. 设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x+1} = l$ ($l \neq \infty$), 试求 a 和 l 的值

三、证明题

5. 证明：当 $x \rightarrow 0$ 时，有 $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

第八节 函数的连续性与间断点

一、填空题

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

二、计算题

2. 下列函数在指定点处间断，说明这些间断点属于哪一类；若为可去间断点，补充或改变定义使函数在该点连续：

(1) $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; $x = 1$, $x = 2$;

(2) $y = \begin{cases} x^{-1} & x \leq 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x = 1$ 处。

3. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性；若有间断点，判断其类型

三、简答题

4. 下列陈述哪些正确？正确说明理由，错误举反例：

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 也在 $x = a$ 处连续；

(2) 若 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处连续，则 $f(x)$ 也在 $x = a$ 处连续。

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = \frac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \arctan \frac{1}{x}$ ，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x) + g(x)$ 的连续区间是 ()

A. $(-\infty, +\infty)$

B. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

C. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

3. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \sim ax$, 则常数 $a =$ ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

4. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 是 $1-\sqrt[3]{x}$ 的 ()

A. 等价无穷小

B. 高阶无穷小

C. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小

D. 低阶无穷小

二、填空题

5. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a+x & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____

三、计算题

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x});$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x \ln(1+x)};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan^2 x)^{\cot^2 x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1} \circ$$

7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)} & x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ 2 & x=1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续, 试求 a, b 的值

四、证明题

8. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 证明: $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$,
 $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 在点 x_0 处也连续

第十节 闭区间上连续函数的性质

一、证明题

1. 证明: 方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间

2. 证明：方程 $x = a \sin x + b$ ($a > 0, b > 0$) 至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $0 \leq f(x) \leq 1$ 。试证：在 $[0, 1]$ 上必存在一点 c ，使得 $f(c) = c$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ ($n \geq 3$)，证明：在 (x_1, x_n) 内至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$

总习题一

一、选择题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的 ()
A. 高阶无穷小
B. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小
C. 低阶无穷小
D. 等价无穷小
2. 设 $f(x)$ 为奇函数, 则下列函数中也为奇函数的是 ()
A. $f(x) + C$ (C 为非零常数) B. $f(-x) + C$ (C 为非零常数)
C. $f(x) + f(-x)$ D. $f[f(x)]$
3. 设函数 $f(x) = x^2 + \arctan \frac{1}{x-1}$, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的 ()
A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

二、填空题

4. 数列 $\{x_n\}$ 有界是 $\{x_n\}$ 收敛的_____
5. 函数 $f(x) = \frac{x-2}{\ln} |x-1|$ 的一个无穷间断点是_____
6. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & x < -1 \\ b & x = -1 \\ a + \arccos x & -1 < x \leq 1 \end{cases}$ 在点 $x = -1$ 处连续, 则 a, b 依次为 _____; _____
7. 函数 $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$ 的间断点及类型 (第几类) 依次为 _____; _____

三、计算题

8. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

四、证明题

9. 根据函数极限的定义, 证明: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$

10. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$

11. 证明: 方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根

第二章 导数与微分

第一节 导数的概念

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)\dots(x+100)$, 则 $f'(1) =$ ()

- A. $101!$ B. $-\frac{101!}{100}$ C. $-100!$ D. $\frac{100!}{99}$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x^2}}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$ ()

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

二、填空题

3. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 与 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ 分别为 _____
; _____

4. 函数 $y = x^2 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$ 的导数等于 _____

5. 曲线 $y = e^x$ 上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____

6. 已知某物体的运动规律为 $s = t^3$ (单位: m), 则该物体在 $t = 2$ (单位: s) 时的速度为 _____

三、计算题

7. 设函数 $f(x) = 10x^2$, 试按导数的定义求 $f'(-1)$

8. 求曲线 $y = \cos x$ 上点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程

9. 在抛物线 $y = x^2$ 上取横坐标分别为 $x_1 = 1$ 及 $x_2 = 3$ 的两点，过这两点作此抛物线的割线。问：该抛物线上哪一点处的切线平行于这条割线？

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$

11. 讨论函数 $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与可导性

第二节 函数的求导法则

一、选择题

1. 设在点 x_0 处函数 $f(x)$ 可导, $g(x)$ 不可导, 则在点 x_0 处 ()
- A. $f(x) + g(x)$ 必可导 B. $f(x)g(x)$ 必不可导
- C. $f(x) - g(x)$ 必不可导 D. $\frac{f(x)}{g(x)}$ 必可导

二、计算题

2. 求下列函数的导数:

(1) $y = 2 \tan x + \sec x - 1;$

(2) $y = \frac{\ln x}{x};$

(3) $y = \frac{e^x}{x^2} + \ln 3;$

(4) $y = x^2 \ln x \cos x.$

3. 求函数 $f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}$ 在点 $x = 0$ 和点 $x = 2$ 处的导数

4. 求下列函数的导数:

(1) $y = \arctan e^x$;

(2) $y = \arcsin^2 x$;

(3) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$;

(4) $y = \ln \tan \frac{x}{2}$;

(5) $y = e^{\arctan \sqrt{x}}$;

(6) $y = e^{-x}(x^2 - 2x + 3)$;

(7) $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$ 。

5. 设函数 $f(x)$ 可导, 求函数 $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

三、证明题

6. 设函数 $f(x)$ 满足: (1) $f(x+y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; (2) $f(x) = 1 + xg(x)$,
且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ 。试证: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 且 $f'(x) = f(x)$

第三节 高阶导数

一、选择题

1. 若函数 $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$, 则 $f^{(27)}(\pi) = (\quad)$

- A. 0 B. $-\frac{1}{2^{27}}$
C. $2^{27} - \frac{1}{2^{27}}$ D. 2^{27}

二、填空题

2. 设函数 $y = (1+x^2) \arctan x$, 则 $y'' =$ _____
3. 若 $f''(x)$ 存在, 函数 $y = \ln f(x)$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____

三、计算题

4. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y = e^{-t} \sin t;$

(2) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$

5. 设 $f''(x)$ 存在, 求函数 $y = f(x^2)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

6. 求下列函数所指定阶的导数:

(1) $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$ 。

四、证明题

7. 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$;

(2) $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$ 。

第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数·相关变化率

一、选择题

1. 设函数 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $y'(1) = (\quad)$

A. 2

B. 8

C. $\frac{1}{2} - \ln 2$

D. $1 - \ln 4$

2. 已知曲线 L 的参数方程为 $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, 则 L 上点 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程是 ()

- A. $x + y = \pi$ B. $x - y = \pi - 4$
C. $x - y = \pi$ D. $x + y = \pi - 4$

二、填空题

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x \sin y + ye^x = 0$ 所确定, 则 $y'(0) =$ _____
4. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____

三、计算题

5. 求由方程 $xy = e^{x+y}$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

6. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 上点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程

7. 求由方程 $y = \tan(x + y)$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

8. 用对数求导法求函数 $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数

9. 求由参数方程 $x = at^2$, $y = bt^3$ 所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

10. 已知一曲线的参数方程为 $x = \sin t$, $y = \cos 2t$, 求该曲线在点 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程

11. 求由下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x = 3e^{-t}$, $y = 2e^t$;

(2) $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$, 设 $f''(t)$ 存在且不为零。

12. 以 $4 \text{ m}^3/\text{min}$ 的速率向深 8 m 、上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中注水, 当水深为 5 m 时, 水面上升的速率为多少?

第五节 函数的微分

一、选择题

1. 一切初等函数在其定义区间内 ()

A. 可微 B. 不可微 C. 连续 D. 有界

二、填空题

2. 已知函数 $y = x^2 - x$, 则在点 $x = 2$ 处, 当 $\Delta x = 0.1$ 时, Δy 与 dy 分别为 _____
; _____
3. $d(\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}) =$ _____
4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是可导函数, 又函数 $y = f[g(2 - x^3)]$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 Δy 关于 Δx 的线性主部为 _____

三、计算题

5. 求下列函数的微分:

(1) $y = x^2 e^{2x};$

(2) $y = \ln^2(1 - x);$

(3) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2};$

(4) $y = \tan^2(1 + 2x^2)。$

6. 已知 $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$, 设 $f''(t)$ 存在且不为零, 求 y 对 x 的微分

7. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2 f(x) + x f(y) = x^2$ 所确定, 其中 $f(x)$ 是 x 的可微函数, 试求 dy

8. 计算 $\sqrt[3]{996}$ 的近似值

总习题二

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在点 $x = a$ 处连续, 则必有 ()

- | | |
|-------------------------|--|
| A. $f'(x) = \varphi(x)$ | B. $f'(x) = \varphi(x) + (x - a)\varphi'(x)$ |
| C. $f'(a) = \varphi(a)$ | D. $f'(a) = \varphi'(a)$ |

2. 若函数 $y = f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时该函数在点 $x = x_0$ 处的微分 dy 是 Δx 的 ()
- A. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小
B. 等价无穷小
C. 低阶无穷小
D. 高阶无穷小

二、填空题

3. 设函数 $s = e^{-t} \cos 3t + \sin 1$, 则 $\frac{ds}{dt} =$ _____
4. 设函数 $y = 2^{\ln \tan x}$, 则 $dy =$ _____
5. 设函数 $y = \frac{x}{1-2\sin x} - \ln(4-x)$, 则 $y'|_{x=\pi} =$ _____
6. 曲线 $y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 5$ 上点 $(2, -1)$ 处的法线方程是 _____
7. 设 $f(x)$ 是可导函数, Δx 是自变量在点 x 处的增量, 则有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^2(x+\Delta x) - f^2(x)}{\Delta x} =$ _____

三、计算题

8. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与可导性

9. 求函数 $y = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 的导数

10. 求函数 $y = \cos^2 x \ln x$ 的二阶导数

11. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$

12. 求由参数方程 $x = \ln \sqrt{1+t^2}$, $y = \arctan t$ 所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

第三章 微分中值定理与导数的应用

第一节 微分中值定理

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = \sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上满足罗尔中值定理的条件, 则罗尔中值定理结论中的 $\xi =$ ()

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

2. 下列函数中在区间 $[1, e]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的是 ()

- A. $\ln x$ B. $\ln \ln x$
C. $\frac{1}{\ln} x$ D. $\ln(2 - x)$

二、填空题

3. 设函数 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)$, 则 $f'(x) = 0$ 的实根个数及所在区间为 _____; _____

三、证明题

4. 证明恒等式: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ($-1 \leq x \leq 1$)

5. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 证明: 在区间 (x_1, x_3) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$

6. 设 $a > b > 0$, 证明: $\frac{a-b}{a} < \ln\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a-b}{b}$

第二节 洛必达法则

一、选择题

1. 下列式子中运用洛必达法则正确的是 ()

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1$
- B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \infty$
- C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在
- D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$

2. 下列式子中, 极限存在但不能用洛必达法则计算的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin x$ B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$

二、填空题

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \underline{\hspace{2cm}}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan x} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

5. 用洛必达法则计算下列极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin} x;$
(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)};$
(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x};$
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$
(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right);$
(6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x};$
(7) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \tan\left(\pi \frac{x}{2}\right);$
(8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}.$

第三节 泰勒公式

一、选择题

1. 已知 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$, 则 $R_3(x) = (\quad)$

- A. $\frac{\sin \xi}{3!} \cdot x^3$ B. $-\frac{\sin \xi}{3!} \cdot x^3$
C. $\frac{\cos \xi}{4!} \cdot x^4$ D. $-\frac{\cos \xi}{4!} \cdot x^4$

2. 函数 $f(x)$ 的泰勒展开式 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + R_{n(x)}$ 中, 拉格朗日余项 $R_{n(x)} = (\quad)$

- A. $f^{(n+1)} \frac{\theta x}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$
B. $f^{(n+1)} \frac{x_0 + \theta x}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$
C. $f^{(n+1)} \frac{x_0 + \theta(x-x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^n \quad (0 < \theta < 1)$
D. $f^{(n+1)} \frac{x_0 + \theta(x-x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$

二、计算题

3. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的三阶泰勒公式

4. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

5. 求函数 $f(x) = xe^x$ 带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式

6. 应用三阶泰勒公式求 $\sqrt[3]{30}$ 的近似值, 并估计误差

7. (附加题) 利用泰勒公式求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right].$$

第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) > g'(x)$, 则在 (a, b) 内有 ()

A. $f(x) - g(x) > 0$

B. $f(x) - g(x) \geq 0$

C. $f(x) - g(x) > f(b) - g(b)$

D. $f(x) - g(x) > f(a) - g(a)$

2. 设函数 $f(x) = |x(1-x)|$, 则 ()

A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

B. $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

3. 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

二、填空题

4. 函数 $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$ 的单调增加区间是_____

5. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的凹区间是_____

6. 设点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 a 、 b 分别为_____;

三、计算题

7. 判定函数 $f(x) = x + \cos x$ 的单调性

8. 求下列函数的单调区间:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$;

(2) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a > 0)$ 。

9. 求下列函数曲线的拐点及凹凸区间:

(1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5;$

(2) $y = \ln(x^2 + 1).$

10. 试确定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a, b, c, d , 使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为其拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上

四、证明题

11. 证明下列不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{x}{2} > \sqrt{1+x}$;

(2) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$ 。

第五节 函数的极值与最大值最小值

本节无题

第六节 函数图形的描绘

一、选择题

1. 已知函数 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ 在点 $x = 1$ 处有极值 -2 , 则常数 a, b 的值为 ()

A. $a = -2, b = 1$

B. $a = 1, b = -1$

C. $a = 0, b = -3$

D. $a = -1, b = -2$

2. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续且取得极大值, 则 ()

A. $f'(x_0) = 0$

B. $f''(x_0) < 0$

C. $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$

D. $f'(x_0) = 0$ 或不存在

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -1$, 则在点 $x = a$ 处 ()

A. 函数 $f(x)$ 的导数存在且 $f'(a) \neq 0$

B. 函数 $f(x)$ 取得极小值

C. 函数 $f(x)$ 取得极大值

D. 函数 $f(x)$ 的导数不存在

4. 曲线 $y = \frac{x^2}{1+x}$ 的渐近线有 ()

A. 2 条

B. 3 条

C. 4 条

D. 5 条

二、填空题

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 其极大值、极小值分别为_____;

6. 已知函数 $y = x + \sqrt{1-x}$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的最大值、最小值分别为_____;

三、计算题

7. 求下列函数的极值:

(1) $y = x - \ln(1+x)$;

(2) $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$ 。

8. 问：函数 $y = x^2 - \frac{54}{x}$ ($x < 0$) 在何处取得最小值？

9. 描绘下列函数的图形（指出单调性、极值、凹凸与渐近线等）：

(1) $y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7)$;

(2) $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 。

10. 要造一圆柱形油罐，体积为 V ，问底半径 r 和高 h 各等于多少时表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

11. 一房产公司有 50 套公寓要出租。当月租金定为 4000 元时公寓可全部租出；月租金每增加 200 元，就多一套租不出去；租出的公寓每月平均花费 400 元维修费。试问月租金定为多少时可获得最大收入？

第七节 曲率

一、填空题

1. 曲线 $y = x^2 + e^{x^2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的曲率与曲率半径分别为_____； _____
2. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 在其顶点处的曲率与曲率半径分别为_____； _____

二、计算题

3. 求椭圆 $4x^2 + y^2 = 4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率

4. 求曲线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 在点 $t = t_0$ 处的曲率

5. 一飞机沿抛物路径 $y = \frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位: m) 做俯冲飞行。在坐标原点 O 处飞机速度为 $v = 200$ m/s, 飞行员体重 $G = 70$ kg。求飞机俯冲至最低点 (原点) 时座椅对飞行员的作用力

总习题三

一、选择题

1. 设在区间 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则下列判断正确的是 ()

A. $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$

B. $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

C. $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

D. $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

2. 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, 则 ()

- A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值
- B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

二、填空题

3. 函数 $y = \ln \sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, 5\frac{\pi}{6}]$ 上满足罗尔中值定理的 ξ 值是 _____

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} =$ _____

5. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点是 $(2, 2e^{-2})$, 凸区间是 $(-\infty, 2)$, 凹区间是 _____

6. 函数 $f(x) = 8 \ln x - x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最大值是 _____

7. 曲线 $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ 的渐近线为 _____; _____

8. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率为 _____

三、计算题

9. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{\pi} \right) \arctan x \right)^x.$

10. 求下列函数在指定点处具有指定阶数及余项的泰勒公式:

(1) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$, $n = 3$, 佩亚诺余项;

(2) $f(x) = x^3 \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 4$, 拉格朗日余项。

11. 设 $a > 1$, 函数 $f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的驻点为 $x(a)$ 。问: a 为何值时 $x(a)$ 最小? 并求出最小值

12. 曲线弧 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径

13. 试确定常数 a 、 b ，使得 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的五阶无穷小

四、证明题

14. 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ ，证明：多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个零点

15. 证明：当 $e < a < b < e^2$ 时， $\ln^2 b - \ln^2 a > \left(\frac{4}{e^2}\right)(b - a)$

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

一、判断题（如果错误，请加以改正）

1. 有界函数一定存在原函数（ ）
2. 设函数 $f(x)$ 的原函数存在， k 为任意常数，则 $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ （ ）
3. 设 $F'(x) = f(x)$ ，则 $[\int dF(x)]' = f(x) + C$ （ ）

二、计算题

4. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$;

(2) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx$;

(3) $\int \frac{1+\sin 2x}{\cos x + \sin x} dx$;

(4) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$;

(5) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$;

(6) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{3^x} dx$ 。

5. 一曲线过点 $(e^2, 3)$, 且该曲线在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程

6. 已知函数 $F(x)$ 的导函数为 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 且当 $x = 1$ 时函数值为 $3\frac{\pi}{2}$, 试求此函数

三、证明题

7. 证明: $\arcsin(2x - 1)$, $\arccos(1 - 2x)$ 和 $2 \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数

第二节 换元积分法(1)

一、判断题（如果错误，请加以改正）

1. 因 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$, 故 $\int \cos 2x \, dx = \sin 2x + C$ ()

2. 若 $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, 则 $\int f(u) \, dx = F(u) + C$ ()

二、填空题

3. 将合适的函数填入下列空格中（空格依次为）：

(1) $\square \, dx = d(ax + b)$;

(2) $d(\square) = x \, dx$;

(3) $d(\square) = \left(\frac{1}{x}\right) dx$;

(4) $d(\square) = \cos x \, dx$;

(5) $d(\square) = \sin x \, dx$;

(6) $d(\square) = e^{2x} \, dx$;

(7) $d(\square) = \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$;

(8) $d(\square) = \frac{1}{x^2} \, dx$ 。

三、计算题

4. 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{(3x-2)^2};$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$(3) \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx;$$

$$(4) \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x};$$

$$(5) \int \cos^3 x dx;$$

$$(6) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$(7) \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx.$$

5. (附加题) 计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{x}{x^2+2x+2} dx$;

(2) $\int \cos \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$ 。

第二节 换元积分法(2)

一、填空题

1. 如果被积函数中含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 可令 $x = a \sin t$ 将根式化去, 此时 $dx =$ _____

2. 如果被积函数中含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$, 可令 $x = a \tan t$ (或 $x = a \sinh t$) 将根式化去, 此时 $dx =$ _____

3. 如果被积函数中含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 可令 $x = a \sec t$ (或 $x = a \cosh t$) 将根式化去, 此时 $dx =$ _____

二、计算题

4. 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) \int \sin \sqrt{x} dx;$$

$$(3) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx;$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}};$$

$$(6) \int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}};$$

$$(7) \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$$

5. (附加题) 计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} dx;$

(2) $\int \frac{dx}{x^{100}+x}.$

第三节 分部积分法

一、简答题

1. 写出不定积分的分部积分公式及其推导过程 (作业讲评时随机点名答辩)

二、计算题

2. 计算下列不定积分:

(1) $\int x e^{-x} dx;$

(2) $\int x \cos \frac{x}{3} dx;$

(3) $\int x^2 \cos x dx;$

(4) $\int x^3 \ln^2 x dx;$

(5) $\int \arcsin^2 x dx;$

(6) $\int \cos \ln x dx;$

(7) $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx.$

3. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int x f'(x) dx$

4. (附加题) 综合所学积分方法, 计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{\ln(2+\sqrt{x})}{x+2\sqrt{x}} dx;$

(2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx.$

第四节 有理函数的积分

一、判断题 (如果错误, 请加以改正)

1. 有理函数也称为有理分式, 整式也是有理分式的一种 ()

2. 有理分式 $\frac{x^3+x^2-x-1}{2x^3+3x^2+6x}$ 是真分式 ()

3. 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\int \frac{\tan x}{\sin x + \cos x - 1} dx = \int \frac{2}{(1-t)(1-t^2)} dt$ 中系数 $A = 2$ 的写法正确 ()

4. 在计算三角函数有理式的不定积分 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ 时, 一般可使用变换 $t = \tan \frac{x}{2}$ ()

5. 所有连续函数均存在初等函数的原函数 ()

二、计算题

6. 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x^3}{x+3} dx;$$

$$(2) \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx;$$

$$(3) \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx;$$

$$(4) \int \frac{dx}{x(x^2+1)};$$

$$(5) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)};$$

$$(6) \int \frac{dx}{3+\sin^2 x}.$$

7. (附加题) 试用两种方法计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$

总习题四

一、选择题

1. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 则在 (a, b) 内 $f(x)$ ()
A. 必有导函数 B. 必有原函数
C. 必有界 D. 必有极限
2. 若 $F'(x) = f(x)$, $\varphi'(x) = f(x)$, 则 $\int f(x) dx =$ ()
A. $F(x)$ B. $\varphi(x)$
C. $\varphi(x) + C$ D. $F(x) + \varphi(x) + C$
3. 下列式子中正确的是 ()
A. $d[\int f(x) dx] = f(x)$ B. $\frac{d}{dx}[\int f(x) dx] = f(x) dx$
C. $\int df(x) = f(x)$ D. $\int df(x) = f(x) + C$
4. 设函数 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ ()
A. $\frac{1}{x} + C$ B. $\ln x + C$
C. $-\frac{1}{x} + C$ D. $-\ln x + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$ ()
A. $\frac{1}{2} \arcsin \sqrt{x} + C$ B. $\arcsin \sqrt{x} + C$
C. $2 \arcsin(2x - 1) + C$ D. $\arcsin(2x - 1) + C$

二、填空题

6. $\int (1 - \sin^2(\frac{x}{2})) dx =$ _____
7. 若 e^x 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x^2 f(\ln x) dx =$ _____
8. 设 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int f(ax + b) dx =$ _____
9. 设 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{dx}{f(x)} =$ _____
10. 若 $\int x f(x) dx = x \sin x - \int \sin x dx$, 则 $f(x) =$ _____

三、计算题

11. 计算下列不定积分:

$$(1) \int \cos \sqrt{x} \, dx;$$

$$(2) \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x} \, dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[4]{\tan x}};$$

$$(4) \int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} \, dx.$$

12. 设函数 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) \, dx$

13. 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int x f'(x) dx$

第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

一、判断题

1. $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$ ()
2. 定积分的定义中, “ $\lambda \rightarrow 0$ ” 可以换成 “ $n \rightarrow \infty$ ” ()
3. 交换定积分的上下限, 定积分的值不变 ()
4. 若 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ 成立, 则必有 $a < c < b$ ()

二、计算题

5. 设 $\int_{-1}^1 3f(x) dx = 18$, $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4$, $\int_{-1}^3 g(x) dx = 3$, 求:

(1) $\int_{-1}^1 f(x) dx$;

(2) $\int_1^3 f(x) dx$;

(3) $\int_3^{-1} g(x) dx$;

(4) $\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{5}\right)[4f(x) + 3g(x)] dx$.

6. 利用定积分的几何意义, 求下列定积分的值 (要求作图):

(1) $\int_0^t (2x + 1) dx;$

(2) $\int_{-1}^2 |x - 1| dx;$

(3) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$

7. 估计下列定积分的值:

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \sin^2 x) dx;$

(2) $\int_2^0 e^{x^2-x} dx.$

8. (附加题) 利用定积分的定义计算 $\int_0^1 e^x dx$

三、证明题

9. (附加题) 已知当 $a > 0$ 时, $ax^2 + bx + c \geq 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow b^2 - 4ac \leq 0$ 。试用此结论

证明: 若 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2$

第二节 微积分基本公式

一、计算题

1. 计算下列导数:

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

2. 求下列极限:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt};$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \arctan^2 t dt}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2};$$

$$(2) \int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx;$$

$$(3) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx;$$

$$(4) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1, \\ (\frac{1}{2})x^2 & x > 1, \end{cases}$$

$$(5) \int_0^2 \max\{x^2, x^3\} dx.$$

4. 设函数 $y = f(x)$ 具有三阶连续导数, 其部分图形如图所示, 试确定下列定积分的符号:

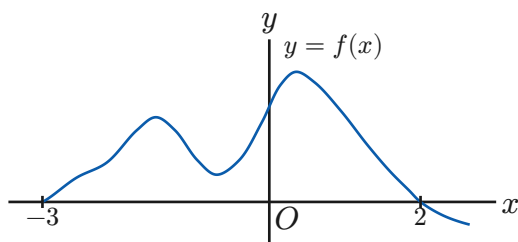


图 5-1

- (1) $\int_{-3}^2 f(x) dx$;
- (2) $\int_{-3}^2 f'(x) dx$;
- (3) $\int_{-3}^2 f''(x) dx$;
- (4) $\int_{-3}^2 f'''(x) dx$ 。

第三节 定积分的换元积分法和分部积分法

一、判断题

1. $\int_1^2 \frac{dx}{(11+5x)^3} \stackrel{u=11+5x}{=} \left(\frac{1}{5}\right) \int_1^2 \frac{du}{u^3} = \left(\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{2}u^{-2}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{40}$ ()
2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$, 又因 $x^2 \sin x$ 为奇函数, 故该积分等于 0 ()

二、计算题

3. 计算下列定积分:

$$(1) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \, dx;$$

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \, dx;$$

$$(3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}};$$

$$(4) \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$(5) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$$

$$(6) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} \, dx;$$

$$(7) \int_0^1 x \arctan x \, dx;$$

$$(8) \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

4. 设函数 $f(x) = x - \int_0^\pi f(x) \cos x \, dx$, 求 $f(x)$

5. (附加题) 设 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\int_0^1 x f(x) dx$

第四节 反常积分

一、判断题

1. 已知 $\sin x$ 是奇函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$ ()
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b + \cos b) = 0$ ()
3. $\int_{-2}^3 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-2}^3 = \ln 3 - \ln 2$ ()

二、计算题

4. 判定下列反常积分的敛散性；若收敛，求其值：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

(3) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$;

(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

(5) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ 。

5. 当 k 为何值时，反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^k x}$ 收敛？当 k 为何值时发散？又当 k 为何值时该反常积分取得最小值？

三、证明题

6. (附加题) 证明: 若 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$,
- $$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(t) dt = f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} f(t) dt = -f(x)$$

总习题五

一、选择题

1. 设 $I = \int_a^b f(x) dx$, 根据定积分的几何意义可知 ()
- A. I 是由曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a$ 、 $x = b$ 与 x 轴所围成图形的面积, 所以 $I > 0$
B. 若 $I = 0$, 则上述图形面积为零, 从而图形的“高” $f(x) = 0$
C. I 是曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a$ 、 $x = b$ 与 x 轴之间各部分面积的代数和
D. I 是由曲线 $y = |f(x)|$ 及直线 $x = a$ 、 $x = b$ 与 x 轴所围成图形的面积
2. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 ()
- A. 必要条件 B. 充分条件
C. 充要条件 D. 无关条件
3. 若 $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$, 则 $\int_{-1}^2 f(x) dx =$ ()
- A. $3 - e^{-1}$ B. $3 + e^{-1}$ C. $3 - e$ D. $3 + e$
4. 设 f 连续, $x > 0$, 且 $\int_1^{x^2} f(t) dt = x^2(x-1)$, 则 $f(2) =$ ()
- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$ B. $2\sqrt{2} - 12$
C. $12 - 2\sqrt{2}$ D. $1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (e^{t^2}-1) dt}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 且 f 在 $x=0$ 处连续, 则必有 ()
- A. $a=1$ B. $a=2$ C. $a=0$ D. $a=-1$

二、填空题

6. $\frac{d}{dx} \int_a^b \arctan x dx =$ _____
7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x} dx =$ _____
8. 由区间 $[a, b]$ 上连续曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a$ 、 $x=b$ ($a < b$) 和 x 轴所围成图形的面积为 $S =$ _____
9. $\int_{-1}^0 |3x+1| dx =$ _____
10. 已知 xe^x 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 xf'(x) dx =$ _____

三、计算题

11. 计算下列定积分:

- (1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x 2t \cos t dt}{1 - \cos x}$;
- (3) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$;
- (4) $\int_1^2 x \log_2 x dx$;
- (5) $\int_1^e \sin \ln x dx$.

四、证明题

12. 设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $\int_a^b x f''(x) \, dx = [b f'(b) - f(b)] - [a f'(a) - f(a)]$

第六章 定积分的应用

第一节 定积分的元素法

本节无题

第二节 定积分在几何学上的应用

一、填空题

1. 能用定积分表示的量具有如下特征：

- (1) 可以把整体划分为数量众多、彼此同类且足够小的微元；
- (2) 每个微元的量能够写成某个自变量的函数与对应微小量（如 dx 、 dy 等）的乘积；
- (3) 当分割无限细时，所有微元量的求和极限存在，并等于所求的总量。

2. 若要求由曲线 $y = x^3$ 和 $y = x^2 + 2x$ 所围成图形的面积，则其面积元素与面积表达式分别为 _____； _____

3. 若要求底面半径为 R 、高为 H 的圆锥的体积，以底面圆心为原点、高为 x 轴，则其体积元素与体积表达式分别为 _____； _____

二、计算题

4. 求由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $x = 2$ 所围成图形的面积

5. 求由曲线 $y = e^x$ 及 $y = e^{-x}$ 与直线 $x = 1$ 所围成图形的面积

6. 求由抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成图形的面积

7. 求由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) 的一拱与 x 轴所围成图形的面积

8. 由曲线 $y = x^3$ 与直线 $x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 计算所得两个旋转体的体积

9. 由曲线 $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所围成的图形绕 y 轴旋转一周, 计算所得旋转体的体积

10. 计算曲线 $y = \ln x$ 上相应于 $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ 的一段弧的长度

11. (附加题) 由圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周, 计算所得旋转体的体积

第三节 定积分在物理学上的应用

一、填空题

1. 设 x 轴上有一长度为 l 、线密度为常数 μ 的细棒, 在与细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M (见图 6-1)。已知万有引力常数为 G , 则质点 M 与细棒之间的引力大小为 _____

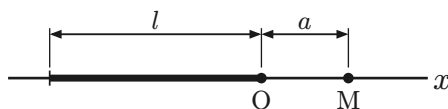


图 6-1

二、简答题

2. 试根据胡克定律, 计算弹簧由原长拉伸 6 cm 所需要做的功 (已知弹簧的劲度系数以 N/m 为单位时数值为 k)
3. 一物体按规律 $x = ct^3$ 做直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比, 计算该物体由 $x = 0$ 移至 $x = a$ 时, 克服介质阻力所做的功

4. 有一圆锥形贮水池（上大下小），深 15 m，口径 20 m，盛满水，现用泵将水吸尽，需做多少功？
5. 有一等腰梯形闸门，它的两条底边分别长 10 m 和 6 m，高为 20 m，较长的底边与水面相齐。计算闸门的一侧所受的水压力
6. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形铅直地浸没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面 3 cm，试求它每面所受的水压力

7. (附加题) 半径为 r 的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的密度 ρ 与水相同, 现将球从水中取出, 需做多少功?

总习题六

一、选择题

1. 由曲线 $y = e^x$ 和直线 $x = 0$ 及 $y = 2$ 所围成的曲边梯形的面积为 ()

- A. $\int_1^2 \ln y \, dy$ B. $\int_0^{e^2} e^x \, dy$
C. $\int_1^{\ln 2} \ln y \, dy$ D. $\int_1^2 (2 - e^x) \, dx$

2. 如图 6-2 所示, 阴影部分面积为 ()

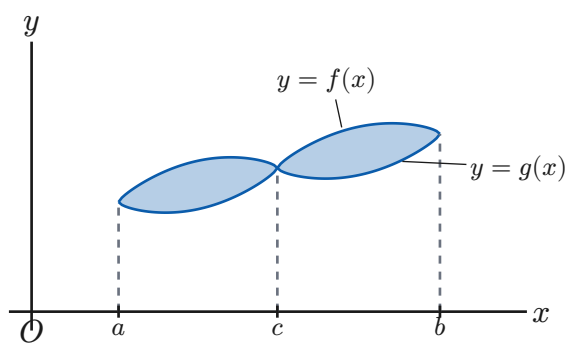


图 6-2

- A. $\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$
B. $\int_a^c [g(x) - f(x)] \, dx + \int_c^b [f(x) - g(x)] \, dx$
C. $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx$
D. $\int_a^c [f(x) - g(x)] \, dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] \, dx$

二、填空题

3. 由抛物线 $y = x^2 + 2x$ 、直线 $x = 1$ 和 x 轴所围成图形的面积为_____
4. 曲线 $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{x^3}$ 相应于区间 $[1, 3]$ 上的一段弧的长度为_____
5. 由曲线 $y = \sin x$ 和它在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线以及直线 $x = \pi$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 _____
6. 水下有一个宽 2 m、高 3 m 的矩形闸门铅直地浸没在水中，水面超过门顶 2 m，则闸门上所受的水压力为 _____
7. 连续函数 $y = f(x, m)$ 对于任意常数 m 恒大于零，则由曲线 $y = f(x, m)$ 及直线 $x = a$ 、 $x = b$ 、 $y = 0$ 所围成图形的面积为 _____

三、计算题

8. 求 C 的值 ($0 < C \leq 1$)，使得由两曲线 $y = x^2$ 与 $y = Cx^3$ 所围成图形的面积为 $\frac{2}{3}$

9. 求 a 的值, 使得由曲线 $y = a(1 - x^2)$ ($a > 0$) 与它在点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 处的法线所围成图形的面积最小

10. 有一立体以由抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x = 2$ 所围成的图形为底, 而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形, 求其体积

第七章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念

本节无题

第二节 可分离变量的微分方程

一、选择题

1. 关于微分方程 $y'' + 2y' + y = e^x$ 的下列结论：① 该方程是齐次微分方程，② 该方程是线性微分方程，③ 该方程是常系数微分方程，④ 该方程为二阶微分方程，其中正确的是（ ）

A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

2. 下列方程中是一阶微分方程的是（ ）

- A. $(y - xy')^2 = x^2 y''$
B. $(y'')^2 + 5(y')^4 - y^5 + x^7 = 0$
C. $(x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$
D. $xy'' + y' + y = 0$

二、填空题

3. $xy'' + 2x^2(y')^2 + x^3y = x^4 + 1$ 是几阶微分方程？阶数为_____
4. 微分方程 $y' = 2\frac{y}{x}$ 的通解为_____

三、计算题

5. 确定函数 $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ 中所含的参数, 使得该函数满足初值条件 $y|_{x=0} = 0$,
 $y'|_{x=0} = 1$

6. 写出在点 (x, y) 处的切线的斜率等于该点横坐标平方的曲线所满足的微分方程

7. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy' - y \ln y = 0$;

(2) $(e^{x+y} - e^x) dx + (e^{x+y} + e^y) dy = 0$ 。

8. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx$, $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$;

(2) $y' \sin x = y \ln y$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 。

9. 一曲线通过点 $(2, 3)$ ，且它在两坐标轴间的任一切线均被切点所平分，求该曲线方程

四、简答题

10. 一个半球体形状的雪堆，其体积融化率与半球体面积 A 成正比，比例系数 $k > 0$ 。
假设在融化过程中雪堆始终保持半球体形状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 h 内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$ ，问：雪堆全部融化需要多少时间？

五、证明题

11. 验证: $x^2 - xy + y^2 = C$ 所确定的函数为微分方程 $(x - 2y)y' = 2x - y$ 的解

第三节 齐次方程

一、选择题

1. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解为 ()

A. $\sin \frac{y}{x} = Cx$

B. $\sin \frac{y}{x} = \frac{1}{Cx}$

C. $\sin \frac{x}{y} = Cx$

D. $\sin \frac{x}{y} = \frac{1}{Cx}$

二、计算题

2. 求下列齐次方程的通解:

(1) $x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x};$

(2) $(x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0.$

3. 求下列齐次方程满足所给初值条件的特解:

(1) $(y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0, y|_{x=0} = 1;$

(2) $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2xy - x^2) dy = 0, y|_{x=1} = 1。$

第四节 一阶线性微分方程

一、判断题

1. $y' = \sin y$ 是一阶线性微分方程 ()
2. $y' = x^3 y^3 + xy$ 不是一阶线性微分方程 ()

二、选择题

3. 以下是一阶线性微分方程的是 ()

A. $y' = \sec y$

B. $yy' = 1$

C. $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

D. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + x^3 + y}{1+x}$

三、计算题

4. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \quad xy' + y = x^2 + 3x + 2;$$

$$(2) \quad (y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0。$$

5. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin \frac{x}{x}, \quad y|_{x=\pi} = 1;$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + 3y = 8, \quad y|_{x=0} = 2。$$

6. 求一曲线方程, 该曲线通过坐标原点, 且它在点 (x, y) 处的切线的斜率等于 $2x + y$

7. 用适当的变量代换将下列微分方程化为可分离变量的微分方程, 然后求其通解:

(1) $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$;

(2) $y(xy + 1) dx + x(1 + xy + x^2y^2) dy = 0$ 。

第五节 可降阶的高阶微分方程

一、填空题

1. 微分方程 $y'' = \sin 2x - \cos x$ 的通解是_____

2. 微分方程 $y'' = e^{2x}$ 的通解是_____

二、计算题

3. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \quad y'' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(2) \quad yy'' + 2(y')^2 = 0.$$

4. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) \quad y'' = e^{2y}, \quad y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0;$$

$$(2) \quad y'' + (y')^2 = 1, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 0.$$

三、简答题

5. 设有一质量为 m 的物体在空中由静止开始下落。如果空气阻力 $R = cv$ (c 为常数, v 为物体运动的速度), 试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系

第六节 高阶线性微分方程

本节无题

第七节 常系数齐次线性微分方程

一、选择题

1. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2, C_3 是任意常数, 则该微分方程的通解是 ()

- A. $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$
B. $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$
C. $(1 + C_1 + C_2)y_1 + C_1y_2 + C_2y_3$
D. $(1 + C_1 + C_2)y_1 - C_1y_2 - C_2y_3$

二、填空题

2. 设 $y_1 = \cos x$ 与 $y_2 = \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的两个解, 则该微分方程的通解为 _____
3. 微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为 _____

4. 已知 $y = e^x$ 与 $y = e^{2x}$ 是某二阶常系数齐次线性微分方程的两个解, 则该微分方程为 _____

三、计算题

5. 求下列微分方程的通解:

(1) $y'' + y' - 2y = 0$;

(2) $y'' - 4y' + 5y = 0$ 。

6. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -5$;

(2) $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 3$ 。

四、简答题

7. 设圆柱形浮筒的底面直径为 0.5 m, 将它铅直地放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 s, 求浮筒的质量

五、证明题

8. 验证: $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是微分方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解

9. 验证： $y = \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$ (C_1, C_2 是任意常数) 是微分方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解

第八节 常系数非齐次线性微分方程

一、选择题

1. 微分方程 $y'' - y = 3e^x + 2$ 的一个特解具有形式 (a, b 为常数) ()

- A. $y^* = ae^x + b$ B. $y^* = ae^x + bx$
C. $y^* = axe^x + b$ D. $y^* = axe^x + bx$

2. 微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的一个特解具有形式 ()

- A. $y^* = a \sin x$ B. $y^* = a \cos x$
C. $y^* = x(a \sin x + b \cos x)$ D. $y^* = a \cos x + b \sin x$

二、计算题

3. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \quad 2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1;$$

$$(2) \quad y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^{3x}.$$

4. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) \quad y'' - 3y' + 2y = 5, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2;$$

$$(2) \quad y'' - 10y' + 9y = e^{2x}, \quad y|_{x=0} = \frac{6}{7}, \quad y'|_{x=0} = \frac{33}{7}.$$

三、简答题

5. 大炮以仰角 α 、初速度 v_0 发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线

总习题七

一、选择题

1. 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$, C 为任意常数, 则该微分方程的通解是 ()

- A. $C[y_1(x) - y_2(x)]$ B. $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$
C. $C[y_1(x) + y_2(x)]$ D. $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

2. 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是 ()

- A. $y''' - y'' - y' + y = 0$ B. $y''' + y'' - y' - y = 0$
C. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ D. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

二、填空题

3. 已知 $y = 1$, $y = x$, $y = x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该微分方程的通解为 _____

三、计算题

4. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \quad xy' \ln x + y = ax(\ln x + 1);$$

$$(2) \quad y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4)。$$

5. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) \quad y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0, \quad y|_{x=1} = 1;$$

$$(2) \quad y'' + y' - 2y = e^x, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2。$$

6. 已知某曲线通过点 $(1, 1)$, 且该曲线上任意一点处的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求该曲线方程

第八章 向量代数与空间解析几何

第一节 向量及其线性运算

一、判断题

1. 若 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ()
2. 若向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, 则平行于向量 $\mathbf{a}$ 的单位向量为 $(\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_z}{|\mathbf{a}|})$ ()

二、选择题

3. 点 $(4, -3, 5)$ 到 y 轴的距离为 ()
A. $\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2}$ B. $\sqrt{(-3)^2 + 5^2}$
C. $\sqrt{4^2 + (-3)^2}$ D. $\sqrt{4^2 + 5^2}$
4. 设有非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则必有 ()
A. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ B. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$
C. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ D. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

三、填空题

5. 点 $(2, 1, -3)$ 关于坐标原点对称的点是 _____
6. 设 $|\mathbf{a}| = 4$, 向量 $\mathbf{a}$ 与轴 l 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $\text{Prj}_l \mathbf{a} =$ _____
7. 设向量 $\mathbf{a}$ 与坐标轴正向的夹角分别为 α, β, γ , 且 $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ$, 则 $\gamma =$ _____ 或 _____
8. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$, 试用坐标式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $-\overrightarrow{M_1M_2}$, 并求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角 _____
9. 求平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量 _____
10. 设向量 $\mathbf{m} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{p} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, 求向量 $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n} - \mathbf{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量 _____
11. 一向量的终点为点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影分别为 $4, -4, 7$, 求此向量的起点 A 的坐标 _____

五、证明题

12. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形

第二节 数量积 向量积 混合积

一、判断题

1. 若 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ 且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ()
2. 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两垂直 ()

二、选择题

3. 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为非零向量, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 是 ()
A. $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充要条件 B. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充要条件
C. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的充要条件 D. $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的必要但不充分条件
4. 设向量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, 则 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) =$ ()
A. $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ B. $-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$
C. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ D. $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
5. 下列结论中正确的是 ()
A. $|\mathbf{a}| \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$
B. 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则必有 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
C. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
D. 若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$

三、填空题

6. 设 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$, $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 8$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$ _____
7. 设向量 $\mathbf{a} = (4, -3, 4)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$, 则 $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} =$ _____
8. 已知 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 26$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 72$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____

四、计算题

9. 设向量 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, 求:

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; (2) $(-2\mathbf{a}) \cdot 3\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} \times 2\mathbf{b}$; (3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角的余弦

10. 已知三点 $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$, 求与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量

11. 求向量 $\boldsymbol{a} = (4, -3, 4)$ 在向量 $\boldsymbol{b} = (2, 2, 1)$ 上的投影

12. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, 求 ΔOAB 的面积

13. 设向量 $\boldsymbol{a} = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2, 3)$, $\boldsymbol{c} = (2, 1, 2)$, 向量 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 均垂直, 且在向量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影是 14, 求向量 $\boldsymbol{d}$

第三节 平面及其方程

一、选择题

1. 平面 $x - 2y + 7z + 3 = 0$ 与平面 $3x + 5y + z - 1 = 0$ 的位置关系为 ()
A. 平行 B. 垂直
C. 相交但不垂直 D. 重合
2. 过点 $M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$ 的平面方程为 ()
A. $14x + 9y - z - 15 = 0$ B. $2x + 7y - 8z - 6 = 0$
C. $14x - 9y + z - 15 = 0$ D. $14x + 9y + z - 15 = 0$
3. 平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 与平面 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角为 ()
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

二、填空题

4. 过点 $M(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程为 _____
5. 点 $M_1(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离为 _____
6. 使得平面 $x + ky - 2z = 9$ 与平面 $2x - 3y + z = 0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的 k 值为 _____

三、计算题

7. 求平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与各坐标面的夹角的余弦

8. 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与联结坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程

9. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\boldsymbol{b} = (1, -1, 0)$, 试求该平面方程

10. 求三平面 $x + 3y + z = 1$, $2x - y - z = 0$ 和 $-x + 2y + 2z = 3$ 的交点

11. 分别按下列条件求平面方程:

- (1) 平行于 zOx 面且过点 $(2, -5, 3)$; (2) 过 z 轴和点 $(-3, 1, 2)$; (3) 平行于 x 轴且过点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$

第四节 空间直线及其方程

一、选择题

1. 直线 $L_1: \begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 的位置关系为 ()
- A. $L_1 \perp L_2$ B. $L_1 \parallel L_2$
- C. L_1 与 L_2 相交但不垂直 D. L_1 与 L_2 为异面直线
2. 直线 $L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{4}$ 与平面 $\Pi: 6x - 2y + 8z = 7$ 的位置关系为 ()
- A. 直线 L 与平面 Π 平行
- B. 直线 L 与平面 Π 垂直
- C. 直线 L 在平面 Π 上
- D. 直线 L 与平面 Π 只有一个交点, 但不垂直
3. 两平行线 $x = t + 1, y = 2t + 1, z = t$ 与 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 之间的距离是 ()
- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

二、填空题

4. 过点 $(2, -3, 4)$ 且与平面 $3x - y + 2z = 4$ 垂直的直线方程为 _____
5. 直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x - y - z + 1 = 0$ 的夹角为 _____

6. 点 $(1, 2, 3)$ 到直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ 的距离为 _____

7. 点 $(-1, 3, -4)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影为 _____

三、计算题

8. 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

9. 求过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行的直线方程

10. 求过点 $(3, 1, -2)$ 且过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程

11. 求过点 $(1, 2, 1)$ 且与两直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 平行的平面方程

12. 求点 $(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离

第五节 曲面及其方程

一、选择题

1. 方程 $y^2 + z^2 - 4x + 8 = 0$ 表示 ()
A. 单叶双曲面 B. 双叶双曲面
C. 锥面 D. 旋转抛物面
2. 旋转双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = -1$ 的旋转轴是 ()
A. x 轴 B. y 轴
C. z 轴 D. 直线 $\begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases}$

二、填空题

3. xOy 面上双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周所得旋转曲面的方程分别为 _____ 和 _____
4. 曲面 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 是由 xOy 面上的曲线 _____ 绕 x 轴旋转一周所得的或是由 _____ 面上的曲线 _____ 绕 _____ 轴旋转一周所得的
5. 方程 $4x^2 + 7y^2 = z$ 所表示的曲面为 _____

三、计算题

6. 一球面过坐标原点及三点 $A(4, 0, 0)$, $B(1, 3, 0)$ 和 $C(0, 0, -4)$, 求球面的方程及球心的坐标和半径
7. 将 zOx 面上的圆 $x^2 + z^2 = 9$ 绕 z 轴旋转一周, 求所得旋转曲面的方程

8. 指出下列方程所表示的曲面并画出草图:

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1;$

(2) $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4;$

(3) $\frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

9. 画出由曲面 $z = 0, z = 3, x - y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x^2 + y^2 = 1$ (在第一卦限内) 所围立体的图形.

第六节 空间曲线及其方程

一、选择题

1. 已知曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = a \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线为 $\begin{cases} y^2 + yz + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, 则 $a =$ ()

A. $\sqrt{2}$

B. 1

C. $\pm\sqrt{2}$

D. ± 1

2. 双曲抛物面 $x^2 - y^2 = z$ 在 zOx 面上的截痕是 ()

- A. $x^2 = z$ B. $\begin{cases} y^2 = -z \\ x = 0 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

3. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a$ 与 $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$ 的交线是 ()

- A. 抛物线 B. 双曲线 C. 圆 D. 椭圆

二、填空题

4. 曲线 $\begin{cases} -2x + y^2 + z^2 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程为 _____

5. 方程组 $\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示 _____, 在空间解析几何中表示 _____

6. 曲线 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ 的一般方程为 _____

三、计算题

7. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴且过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程

8. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

9. 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程

10. 求上半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$) 的公共部分在 xOy 面和 zOx 面上的投影

11. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 4$) 在三个坐标面上的投影

总习题八

一、选择题

- 点 $M(2, -3, 1)$ 关于坐标原点对称的点是 ()
A. $(-2, 3, -1)$ B. $(-2, -3, -1)$
C. $(2, -3, -1)$ D. $(2, 3, 1)$
- 设向量 $\mathbf{a} = (1, -1, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$, λ 为非零常数。若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则 $\lambda =$ ()
A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
- 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足关系式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, 则 ()
A. 必有 $\mathbf{a} = 0$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ B. 必有 $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c} = 0$
C. 当 $\mathbf{a} \neq 0$ 时, 必有 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ D. 必有 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c})$
- 方程 $(z - a)^2 = x^2 + y^2$ 表示 ()
A. yOz 面上曲线 $(z - a)^2 = y^2$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面
B. zOx 面上曲线 $(z - a)^2 = x^2$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面
C. zOx 面上直线 $z - a = x$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面
D. yOz 面上直线 $z - a = y$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面

5. 平面 $x + 2y - z + 3 = 0$ 与直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ 的位置关系为 ()

- A. 互相垂直 B. 互相平行但直线不在平面上
C. 既不平行也不垂直 D. 直线在平面上

二、填空题

6. 已知三点 $A(-2, 1, -1), B(1, -3, 4), C(-3, -1, 1)$, 则:

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为 _____, 单位向量为 _____; (2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影为 _____, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 _____; (3) 以该三点为顶点的三角形的面积为 _____; (4) 过点 C 且垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 的平面方程为 _____; (5) 过点 C 且平行于 $\overrightarrow{AB}$ 的直线方程为 _____

7. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 1, -4), \mathbf{b} = (2, 0, -2)$, 则 (1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) =$

(2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) =$ _____; _____

8. 方程 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$ 所表示的曲面为 _____

9. 曲线 $\begin{cases} y=x^2+1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面方程是 _____

10. 点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影是 _____

三、计算题

11. 已知向量 $\mathbf{A} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}, \mathbf{B} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}, |\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 3, \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$, 求 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$

12. 求过两点 $(1, 2, -1)$ 和 $(-5, 2, 7)$ 且平行于 x 轴的平面方程

13. 求过点 $(2, -3, 1)$ 和直线 $\begin{cases} x-5y-16=0 \\ 2y-z+6=0 \end{cases}$ 的平面方程

14. 求点 $(1, 2, -1)$ 到直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ 的距离

15. 求过直线 $\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ 且垂直于平面 $x + 4y - 3z + 7 = 0$ 的平面方程

16. 求过点 $(0, -1, 1)$ 且与直线 $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+z=2 \end{cases}$ 平行的直线方程

17. 求过点 $A(1, 0, -2)$ 且垂直于直线 $L: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$ 同时平行于平面 $\Pi: 3x + 4y - z + 6 = 0$ 的直线方程

18. 试讨论直线 $L_1: \frac{1-x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$ 与 $L_2: \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3x+z-2=0 \end{cases}$ 的位置关系

19. 求直线 $L: \begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $\Pi: 4x-y+z=1$ 上的投影直线方程

20. 方程 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 分别表示什么曲面? 求这两个曲面的交线在 zOx 面上的投影直线方程, 并指明曲线类型

第九章 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念

一、选择题

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = (\quad)$
- A. 0 B. 不存在
C. $\frac{1}{2}$ D. 存在但不等于 0 或 $\frac{1}{2}$
2. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$ 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = (\quad)$
- A. 不存在 B. 1 C. 0 D. 2
3. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 则 $f(x, y)$
- ()
- A. 处处连续 B. 处处有极限, 但不连续
C. 仅在点 $(0, 0)$ 处连续 D. 除点 $(0, 0)$ 外处处连续

二、填空题

4. 函数 $z = \sqrt{\ln(x+y)}$ 的定义域为 _____
5. 设函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy \ln \frac{y}{x}$, 则 $f(kx, ky) = \underline{\hspace{2cm}}$
6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (\ln(y + e^{x^2})) (\sqrt{x^2 + y^2}) = \underline{\hspace{2cm}}$
7. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ A & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 要使得 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$
8. 函数 $f(x, y) = (x^2 - y^2)^{-1} \cos \frac{y}{x}$ 的间断点为 _____

三、计算题

9. 求下列函数的定义域, 并画出定义域的图形:

(1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; (2) $z = \ln(x + y)$; (3) $z = \frac{1}{\ln(x+y)}$; (4) $z = \ln(xy - 1)$

10. 求下列极限:

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} \right)$;

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy) (\sqrt{2 - e^{xy}} - 1)$;

(3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \left(\frac{\tan xy}{y} \right)$;

(4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}} \right)$.

第二节 偏导数

一、选择题

1. 设函数 $u = \arctan \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ ()

A. $\frac{x}{x^2 + y^2}$

B. $-\frac{y}{x^2 + y^2}$

C. $\frac{y}{x^2 + y^2}$

D. $-\frac{x}{x^2 + y^2}$

2. 设函数 $f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $f_{x'}(2, 1) = (\quad)$

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 设函数 $z = y^x$, 则 $(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y})|_{x=2, y=1} = (\quad)$

- A. 2 B. $1 + \ln 2$ C. 0 D. 1

二、填空题

4. 设函数 $z = \sin(3x - y) + y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=2, y=1} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 设函数 $u = xy + \frac{y}{x^3}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 设函数 $u = x \ln(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

7. 求下列函数的偏导数:

(1) $z = \sqrt{\ln(xy)}$;

(2) $z = (1 + xy)^y$;

(3) $u = x^{\frac{y}{z}}$;

(4) $u = (x - y)^z$

8. 求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

(1) $z = \arctan \frac{y}{x}$;

(2) $z = y^x$

四、证明题

9. 设函数 $z = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$, 求证: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z$

第三节 全微分

一、选择题

1. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f_{x'}(x_0, y_0), f_{y'}(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点处全微分存在的 ()
- A. 充分条件 B. 充要条件
C. 必要条件 D. 无关条件

2. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f_{x'}(x_0, y_0), f_{y'}(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点处连续的.

()

- A. 充要条件 B. 必要条件
C. 充分条件 D. 无关条件

3. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处满足关系

()

- A. 可微分 $\Rightarrow$ 可偏导 $\Rightarrow$ 连续
B. 可微分 $\Rightarrow$ 可偏导 $\Rightarrow$ 连续
C. 可微分 $\Rightarrow$ 可偏导, 且可微分 $\Rightarrow$ 连续, 但可偏导不一定连续
D. 可偏导与连续之间没有必然联系, 且可偏导不一定可微分

二、填空题

4. 函数 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$ 时的全增量 $\Delta z \approx$ _____,
全微分 $dz =$ _____

5. 设函数 $z = e^{y(x^2+y^2)}$, 则 $dz =$ _____

6. 设函数 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$, 则 $dz =$ _____

三、计算题

7. 设函数 $u = a^{x+yz} - \ln x^a$ ($a > 0$), 求 du

8. 求函数 $z = \ln(x^2 + y^2 + e^{xy})$ 的全微分

9. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x = 1, y = 2$ 时的全微分.

四、证明题

10. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 证明: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在, 但偏导数在点 $(0, 0)$ 处不连续, 而 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微分.

第四节 多元复合函数的求导法则

一、选择题

1. 设函数 $u = (x - y)^z$, 而 $z = x^2 + y^2$, 则 $u_{x'} + u_{y'} =$ ()
- A. $2[z(x - y)^{z-1} + (x + y)(x - y)^z \ln(x - y)]$
B. $2z(x - y)^z$
C. $2(x - y)^z(x + y) \ln(x - y)$
D. $2(x - y)^{z+1} \ln(x - y)$
2. 设函数 $z = 3^{xy}$, 而 $x = f(y)$ 且 f 可导, 则 $\frac{dz}{dy} =$ ()
- A. $3^{xy}(y + xf'(y)) \ln 3$ B. $3^{xy}(x + yf'(y)) \ln 3$
C. $\frac{3^{xy}}{\ln 3(x + yf'(y))}$ D. $z_x f'(y) + z_y$
3. 设函数 $u = f(x + y, xz)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} =$ ()
- A. $f_{2'} + xf_{(11)}'' + zf_{(12)}'' + xf_{(12)}''$
B. $xf_{(12)}'' + xf_{2'} + xzf_{(22)}''$
C. $xf_{(21)}'' + xzf_{(22)}''$
D. $f_{2'} + xf_{(21)}'' + xzf_{(22)}''$
4. 若函数 $f(x, 2x) = x^2 + 3x$, $f_{1'}(x, 2x) = 6x + 1$, 则 $f_{2'}(x, 2x) =$ ()
- A. $x + \frac{3}{2}$ B. $x - \frac{3}{2}$ C. $2x + 1$ D. $-2x + 1$

二、填空题

5. 设函数 $z = x^2 + \sin y$, $x = \cos t$, $y = t^3$, 则 $\frac{dz}{dt} =$ _____
6. 设函数 $z = f(x + y, x - y)$, 其中 f 可微, 则 $dz =$ _____
7. 设函数 $z = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____

三、计算题

8. 设函数 $z = u^2 \ln v$, 而 $u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

9. 设函数 $z = \arcsin(x - y)$, 而 $x = 3t, y = 4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$

10. 设函数 $z = \arctan(xy)$, 而 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$

11. 设函数 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

12. 设函数 $z = f(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

第五节 隐函数的求导公式

一、选择题

1. 已知 $x + y - z = e^x, xe^x = \tan t, y = \cos t$, 则 $\frac{dz}{dt} \big|_{t=0} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. 0

2. 设函数 $y = y(x, z)$ 由方程 $xyz = e^{x+y}$ 所确定, 则 $\frac{\partial y}{\partial x} =$

()

- A. $\frac{y(x-1)}{x(1-y)}$ B. $\frac{y}{x(1-y)}$ C. $\frac{yz}{1-y}$ D. $\frac{y(1-xz)}{x(1-y)}$

二、填空题

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $1 + x^2 y = e^y$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xy^2 z = x + y + z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____

5. 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

6. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

7. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

8. 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

9. 设 $\begin{cases} u=f(u, v+y) \\ v=g(u-x, v^2y) \end{cases}$ 其中 f, g 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

四、证明题

10. 设 $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

11. 设函数 $\Phi(u, v)$ 具有一阶连续偏导数, 证明: 由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

第六节 多元函数微分学的几何应用

一、选择题

1. 曲线 $x = 2 \sin t, y = 4 \cos t, z = t$ 在点 $(2, 0, \frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程为

()

A. $2x - z = 4 - \frac{\pi}{2}$

B. $2x - z = \frac{\pi}{2} - 4$

C. $4y - z = -\frac{\pi}{2}$

D. $4y - z = \frac{\pi}{2}$

2. 曲线 $4x = y^5, y = \sqrt{z}$ 在点 $(8, 2, 4)$ 处的切线方程为

()

A. $\frac{x-8}{20} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{4}$

B. $\frac{x+12}{20} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{4}$

C. $\frac{x-8}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{4}$

D. $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{4}$

3. 曲面 $x \cos z + y \cos x - \frac{\pi}{2}z = \frac{\pi}{2}$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1 - \frac{\pi}{2}, 0)$ 处的切平面方程为.

()

A. $x - z = \pi - 1$

B. $x - y = \pi - 1$

C. $x - y = \frac{\pi}{2}$

D. $x - z = \frac{\pi}{2}$

4. 曲面 $x^2yz - xy^2z^3 = 6$ 在点 $(3, 2, 1)$ 处的法线方程为

()

A. $\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{-18}$

B. $\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-18}$

C. $8x - 3y - 18z = 0$

D. $8x + 3y - 18z = 12$

二、填空题

5. 曲线 $x = t^2, y = 2t, z = \frac{t^3}{3}$ 在点 $(1, 2, \frac{1}{3})$ 处的切线方程为 _____

6. 曲线 $x = 2te^{2t}, y = 3e^{2t}, z = t^2e^{2t}$ 在 $t = -1$ 的对应点处的法平面方程为 _____

7. 曲面 $xe^y + y^2e^{2z} + z^3e^{3x} = \frac{2}{e} + 1$ 在点 $(2, -1, 0)$ 处的法线方程为 _____

8. 曲面 $y + xz = \frac{\pi}{4}$ 在点 $(-2, 1, 0)$ 处的切平面方程为 _____

三、计算题

9. 求曲线 $x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1+t}{t}, z = t^2$ 在 $t = 1$ 的对应点处的切线及法平面方程

10. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程

11. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程

12. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程

13. 求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 在点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

第七节 方向导数与梯度

一、填空题

1. 设函数 $z = x^2 - y^2$, 求其在点 $(1, 1)$ 处沿与 x 轴正向成 $\frac{3\pi}{4}$ 方向的方向导数为 _____

2. 设函数 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy + 3x - 2y - 6z$, 则 $\text{grad } f(0, 0, 0) =$ _____

二、计算题

3. 设函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 求:

(1) $\mathbf{grad} u(1, 1, 1)$;

(2) $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)|_{(1,1,1)}$, 其中方向 l 从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(2, 3, 3)$

4. 设函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$, 求:

(1) $\mathbf{grad} f(1, -1)$;

(2) $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)|_{(1,-1)}$, 其中方向 l 与 x 轴正向成 $\frac{\pi}{4}$ 角;

(3) $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)|_{(1,-1)}$, 其中方向 l 与 $\mathbf{grad} f(1, 1)$ 同向

5. 如果可微函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 2)$ 处沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2)$ 的方向的方向导数为 2, 沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(1, 1)$ 的方向的方向导数为 -2 , 求:

(1) $\text{grad } f(1, 2)$;

(2) $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)|_{(1,2)}$, 其中方向 l 从点 $(1, 2)$ 到点 $(4, 6)$

6. 已知曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处指向外侧的法向量为 $\mathbf{n}$, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数.

三、证明题

7. (附加题) 证明: 函数 $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且可偏导, 但除沿坐标轴的方向外, 在点 $(0, 0)$ 处沿其他方向的方向导数都不存在

第八节 多元函数的极值及其求法

一、选择题

1. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有偏导数且在点 (x_0, y_0) 处有极值是 $f_{x'}(x_0, y_0) = 0$ 及 $f_{y'}(x_0, y_0) = 0$ 的 ()
- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 无关条件
2. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = x dx + y dy$, 则点 $(0, 0)$ ()
- A. 不是 $f(x, y)$ 的连续点 B. 不是 $f(x, y)$ 的极值点
C. 是 $f(x, y)$ 的极大值点 D. 是 $f(x, y)$ 的极小值点
3. 函数 $z = 3(x + y) - x^3 - y^3$ 的极值点是 ()
- A. $(1, 2)$ B. $(1, -2)$
C. $(-1, 2)$ D. $(-1, -1)$

二、填空题

4. 设函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极值, 则常数 $a =$ _____, 极值的类型为 _____

5. 若要求函数 $u = \sin x \sin y \sin z$ 在条件

$x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 下的极值,

可构造拉格朗日函数 _____, 求得其驻点为 _____, 在该点处函数取得 _____

三、计算题

6. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值

7. 在 xOy 面上求一点, 使得它到 $x = 0, y = 0$ 及 $x + 2y - 16 = 0$ 三直线的距离的平方和最小.

8. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体

9. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使得它到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短

10. (附加题) 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上的最大值, 并证明: 对于正实数 a, b, c , 有 $abc^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$ 成立

总习题九

一、选择题

1. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{x+y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 则 $f_{y'}(0, 0) =$ ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. -1
2. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数 $f_{x'}(x_0, y_0), f_{y'}(x_0, y_0)$ 存在, 则 ()
A. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分
B. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续
C. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处存在任意方向的方向导数
D. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 与 y 皆连续
3. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分, Δz 是 f 在点 (x_0, y_0) 处的全增量, 则在点 (x_0, y_0) 处有 ()
A. $\Delta z = d z$
B. $\Delta z = f_{x'}(x_0, y_0)\Delta x + f_{y'}(x_0, y_0)\Delta y$
C. $\Delta z = f_{x'}(x_0, y_0) d x + f_{y'}(x_0, y_0) d y$
D. $\Delta z = d z + o(\rho)$, 其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
4. 设方程 $y = F(x^2 + y^2) + F(x + y)$ 能确定隐函数 $y = f(x)$ (F 可微), 且 $f(0) = 2$, $F'(2) = \frac{1}{2}, F'(4) = 1$, 则 $f'(0) =$ ()
A. 1 B. $-\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
5. 曲面 $xyz = 1$ 上平行于平面 $x + y + z + 3 = 0$ 的切平面方程是 ()
A. $x + y + z - 3 = 0$ B. $x + y + z - 2 = 0$
C. $x + y + z - 1 = 0$ D. $x + y + z = 0$

二、填空题

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + \sin xy)^{\frac{1}{xy}} =$ _____
7. 设函数 $z = x^{y+1} (x > 0, x \neq 1)$, 则 $d z =$ _____

8. 设函数 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则它在点 $M_0(1, -1, 1)$ 处的方向导数的最大值为 _____

9. 曲线 $x = \cos t, y = \sin t, z = \tan \frac{t}{2}$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处的切线方程为 _____

10. 函数 $z = xy$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 上的最大值为 _____

三、计算题

11. 设函数 $w = f(x + y + z, xyz)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.

12. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(z^2 - x^2, z^2 - y^2) = 0$ 所确定, 其中 F 具有一阶连续偏导数, 试求 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$.

13. 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程

14. 求坐标原点到曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 的最短和最长距离.

四、证明题

15. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 y^2) \left((x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right) & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 证明: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在, 但不可微分.

第十章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质

一、选择题

- $\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 中 λ 是 ()
A. 最大小区间长度 B. 小区域最大面积
C. 小区域直径 D. 小区域最大直径
- 能使得等式 $\iint_D d\sigma = 1$ 成立的积分区域 D 为 ()
A. 由直线 $y = x, x = 1, y = 0$ 所围成的平面区域
B. 由直线 $y = 2x, x = 1, y = 0$ 所围成的平面区域
C. 由直线 $|x| + |y| = 1$ 所围成的平面区域
D. 由曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 与直线 $y = 0$ 所围成的平面区域
- 设 D 是由直线 $x = 0, y = 0, x + y = 3, x + y = 5$ 所围成的闭区域, 记 $I_1 = \iint_D \ln(x + y) \, d\sigma, I_2 = \iint_D \ln^2(x + y) \, d\sigma$, 则 ()
A. $I_1 < I_2$ B. $I_1 > I_2$
C. $I_2 = 2I_1$ D. 无法比较

二、填空题

- 设曲顶柱体的顶部曲面函数 $z = f(x, y)$, 它的底部区域为 D , 则曲顶柱体的体积可表示为 _____
- 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D d\sigma =$ _____
- 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\} \quad (a > 0)$, 则 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma =$ _____
- 设一平面薄片在 xOy 面内占有区域 D , 其面密度函数为 $\rho = \frac{x^2 + y^2}{2}$, 则此薄片的质量可表示为 _____

三、计算题

8. 利用二重积分的性质估计二重积分 $I = \iint_D (x^2 + y^2 + 2) \, d\sigma$ 的值, 其中积分区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$

第二节 二重积分的计算法 (1)

一、判断题 (如果错误, 请加以改正)

1. 设闭区域 D 由直线 $y = x, y = 1, x = 3$ 所围成, 要计算 $\iint_D \frac{1}{y \ln x} \, d\sigma$.
- (1) 既可将 D 视为 X 型区域, 也可视为 Y 型区域 ();
- (2) 若将 D 视为 X 型区域, 则其相应积分限为 $1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq x$ ();
- (3) 该积分的结果为 2 ()

二、选择题

2. 设闭区域 D 由 x 轴和 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 所围成, 则 $\iint_D y \, d\sigma =$ ()
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
3. 设闭区域 D 由 $y = x^2$ 和 $y = x + 2$ 所围成, 则 $\iint_D f(x, y) \, d\sigma =$ ()
- A. $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) \, dy$ B. $\int_{-1}^2 dx \int_0^2 f(x, y) \, dy$
- C. $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) \, dy$ D. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) \, dy$
4. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y) \, dy =$ ()
- A. $\int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) \, dx$ B. $\int_0^4 dy \int_{-y}^{\frac{y^2}{4}} f(x, y) \, dx$
- C. $\int_0^4 dy \int_{\frac{1}{4}}^y f(x, y) \, dx$ D. $\int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^y f(x, y) \, dx$

5. 若闭区域 D 由直线 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 所围成, 且 $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 xf(x) \, dx$, 则 $\iint_D f(x) \, d\sigma =$ ()
- A. 2 B. 0 C. 0.5 D. 1

三、填空题

6. 已知闭区域 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1\}$, 且 $\iint_D yf(x) \, d\sigma = 1$, 则 $\int_a^b f(x) \, dx =$ _____
7. 设闭区域 D 由两坐标轴与直线 $x + y = 2$ 所围成, 若将 D 视为 X 型区域, 则其相应积分限为 _____; 若将 D 视为 Y 型区域, 则其相应积分限为 _____
8. 设闭区域 D 由曲线 $y = e^x$ 与直线 $x = 0, y = e$ 所围成, 若将 D 视为 X 型区域, 则其相应积分限为 _____; 若将 D 视为 Y 型区域, 则其相应积分限为 _____
9. 设闭区域 D 由曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成。若将 D 视为 X 型区域, 则其相应积分限为 _____; 若将 D 视为 Y 型区域, 则其相应积分限为 _____

四、计算题

10. 计算 $\iint_D x\sqrt{y} \, d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{x}, y = x^2$ 所围成的闭区域

11. 计算 $\iint_D e^{x+y} \, d\sigma$, 其中闭区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$

12. 计算 $\iint_D (x^2 + y^2 - x) \, d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = 2, y = x$ 及 $y = 2x$ 所围成的闭区域

第二节 二重积分的计算法 (2)

一、选择题

1. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho \, d\rho$ 可写成 ()

- A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) \, dx$ B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx$
C. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) \, dy$ D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) \, dy$

2. 设闭区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则有 $\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \iint_D f(y, x) \, d\sigma$ 。用此结论可得 $\iint_{x^2+y^2 \leq 2} \left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right) \, d\sigma =$ ()

- A. π B. $\frac{3}{2}\pi$ C. $\frac{5}{4}\pi$ D. 2π

二、填空题

3. 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 则 $\iint_D f(x, y) \, d\sigma$ 在极坐标系下的二次积分可表示为 _____
4. 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D f(x, y) \, d\sigma$ 在极坐标系下的二次积分可表示为 _____
5. 将二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2}) \, dy$ 化为极坐标形式, 结果为 _____
6. 若二重积分 $\iint_D (x^5 + \sin y^3 + 3) \, d\sigma = 24$, 则闭区域 D 可用不等式表示成 _____

三、计算题

7. 计算 $\iint_D xy^2 \, d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域

8. 计算 $\iint_D |1 - x^2 - y^2| \, d\sigma$, 其中闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

9. 计算 $\iint_D \frac{y}{x} \, d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 0, y = x$ 所围成的在第一象限的闭区域

10. (附加题) 计算 $\iint_D (x + y) \, d\sigma$, 其中闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x + y\}$

第三节 三重积分(1)

一、选择题

1. 设空间闭区域 Ω 由曲面 $z = xy$ 与平面 $y = x, x = 1$ 及 $z = 0$ 所围成, 则

$$\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 \, dv = (\quad)$$

A. $\frac{1}{361}$

B. $\frac{1}{362}$

C. $\frac{1}{363}$

D. $\frac{1}{364}$

2. 设空间闭区域 Ω 由曲面 $z = xy$ 及平面 $x + y - 1 = 0, z = 0$ 所围成, 将 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv$ 化成三次积分为 ()

- A. $\int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz$
- B. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz$
- C. $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz$
- D. $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz$

3. 设空间闭区域 Ω 由曲面 $y = \sqrt{x}$ 及平面 $y = 0, z = 0, x + z = \frac{\pi}{2}$ 所围成, 下列将 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv$ 化成三次积分中不正确的是 ()

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(x, y, z) \, dz$
- B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\sqrt{y}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(x, y, z) \, dz$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} dz \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y, z) \, dy$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \int_0^{\frac{\pi}{2}-z} dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y, z) \, dy$

二、填空题

4. 设有一物体占有区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 其密度函数为 $\rho = x + y + z$, 则该物体的质量为 _____

三、计算题

5. 计算 $\iiint_{\Omega} xz \, dv$, 其中空间闭区域 Ω 由平面 $z = 0, z = y, y = 1$ 及曲面 $y = x^2$ 所围成

6. 计算 $\iiint_{\Omega} z \, dv$, 其中空间闭区域 Ω 由平面 $z = h$ 及曲面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ ($R > 0, h > 0$) 所围成

第三节 三重积分(2)

一、选择题

1. 已知 Ω 是由曲面 $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$ 及平面 $z = 5$ 所围成的空间闭区域, 则

$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv$ 在柱面坐标系下的三次积分为 ()

- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \int_0^5 dz$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho^3 \, d\rho \int_0^5 dz$
C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \, d\rho \int_0^5 dz$

2. 设有空间闭区域 $\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$,

$\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 ()

- A. $\iiint_{\Omega_1} x \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x \, dv$
B. $\iiint_{\Omega_1} y \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y \, dv$
C. $\iiint_{\Omega_1} z \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z \, dv$
D. $\iiint_{\Omega_1} xyz \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz \, dv$

二、填空题

3. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围成的空间闭区域, 则

$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv$ 在柱面坐标系下的三次积分为 _____

4. 设 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的空间闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \, dv =$ _____

三、计算题

5. 计算 $\iiint_{\Omega} xy \, dv$, 其中 Ω 是由柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$ 所围成且在第一卦限的空间闭区域

6. 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 \, dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ($R > 0$) 所围成的空间闭区域

7. 计算 $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \, dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的空间闭区域

8. (附加题) 试分别利用柱面坐标和球面坐标计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的空间闭区域

第四节 重积分的应用

一、选择题

1. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 内部的面积为 ()

A. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr$

B. $8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr$

C. $16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr$

D. $4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr$

2. 半径分别为 R 和 r ($0 < r < R$) 的两个圆所围成的均匀圆环状薄片 (设面密度为 ρ) 关于其中心的转动惯量 $I_O =$ ()

- A. $\pi\rho(R^4 - r^4)$ B. $\frac{1}{2}\pi\rho(R^4 - r^4)$
C. $\frac{1}{4}\pi\rho(R^4 - r^4)$ D. $\frac{1}{8}\pi\rho(R^4 - r^4)$

二、填空题

3. 设均匀平面薄片所占闭区域为 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0 \right\}$, 则其面积为 _____, 其质心坐标为 _____
4. 设平面闭区域 D 的形心坐标为 $(2, 3)$, 其面积为 2, 则 $\iint_D x \, d\sigma =$ _____, $\iint_D y \, d\sigma =$ _____
5. 半圆形薄片 $x^2 + y^2 \leq R^2$ ($y \geq 0$) 的面密度 $\rho = 1$, 则其关于 y 轴的转动惯量 $I_y =$ _____

三、计算题

6. 求两个正交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的体积与表面积

7. 在均匀半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好在圆心上, 问: 接上去的均匀矩形薄片另外一边的长度应为多少?

8. 求由曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的立体的质心, 设其密度为 $\rho = 1$.

9. 设均匀薄片 (密度 $\rho = 1$) 所占的闭区域 D 是 xOy 面内由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成的, 求此均匀薄片关于 x 轴和 y 轴的转动惯量 I_x, I_y

总习题十

一、判断题

1. 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, D_1 为 D 在 first 象限的区域, 则 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, d\sigma = 4 \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} \, d\sigma$ ()
2. 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, D_1 为 D 在第一象限的区域, 则 $\iint_D xy \, d\sigma = 4 \iint_{D_1} xy \, d\sigma$ ()
3. 二重积分 $\iint_D f(x, y) \, d\sigma$ 的几何意义是以曲面 $z = f(x, y)$ 为曲顶, 以区域 D 为底面的曲顶柱体的体积。(注: 需 $f(x, y) \geq 0$) ()
4. 设空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, Ω_1 为 Ω 在第一卦限的区域, 则 $\iiint_{\Omega} x \, dv = 4 \iiint_{\Omega_1} x \, dv$ ()

二、选择题

5. 设闭区域 D 由直线 $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$ 所围成, 记 $I_1 = \iint_D \ln(x+y) \, d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y) \, d\sigma$, $I_3 = \iint_D \sin(x+y) \, d\sigma$, 则 I_1, I_2, I_3 间的大小关系为 ()
A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$
C. $I_1 < I_3 < I_2$ D. $I_2 < I_1 < I_3$
6. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则二次积分 $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) \, dy =$ ()
A. $\int_{-8}^2 dy \int_{2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) \, dx$
B. $\int_{-8}^2 dy \int_{-6}^{2-y} f(x, y) \, dx$
C. $\int_{-1}^2 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) \, dx + \int_2^8 dy \int_{2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) \, dx$
D. $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) \, dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) \, dx$
7. 设 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及平面 $x=0, y=0, z=0$ 所围成的空间闭区域在第一卦限的部分, 则 $\iiint_{\Omega} xyz \, dv =$ ()
A. $\frac{1}{48}$ B. $\frac{1}{56}$ C. $\frac{1}{64}$ D. $\frac{1}{72}$

三、计算题

8. 计算 $\int_0^1 \mathrm{d} x \int_x^1 x^2 e^{-y^2} \mathrm{d} y$.

9. 计算 $\iint_D (x^2 - y^2) \mathrm{d} \sigma$, 其中闭区域 D 由曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 和直线 $y = 0$ 所围成

10. 计算 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \mathrm{d} \sigma$, 其中闭区域 D 由圆 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成

11. 计 算 $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \mathrm{d} v$, 其 中 空 间 闭 区 域 Ω 由 平 面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成

12. 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d} v$, 其 Ω 为曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面与平面 $z=4$ 所围成的空间闭区域

13. 一均匀物体(密度 ρ 为常数) 占有的空间闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0$, $|x| = a, |y| = a$ 所围成, 求: (1) 物体的体积; (2) 物体的质心; (3) 物体关于 z 轴的转动惯量

第十一章 曲线积分与曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分

一、选择题

1. 设 L 为从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,2)$ 的线段, 则 $\int_L (x+y) \, ds =$ ()
A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 0
2. $\oint_L (x^2 + y^2) \, ds =$, 其中 L 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ ()
A. $\int_{2\pi}^0 d\theta$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta$
C. $\int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta$ D. $\int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, d\theta$
3. $\int_L x \, ds =$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上相应于 x 从 0 到 1 的一段弧 ()
A. $\frac{1}{12(5\sqrt{5}-1)}$ B. $5\sqrt{5} - 1$
C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{8(5\sqrt{5}-1)}$
4. 设 OM 为从点 $O(0,0)$ 到点 $M(1,1)$ 的线段, 则与 $\int_{OM} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds$ 不相等的积分是 ()
A. $\int_0^1 \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} \, dx$ B. $\int_0^1 \sqrt{2}e^{\sqrt{2}y} \, dy$
C. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}e^r \, dr$ D. $\int_0^{\sqrt{2}} e^r \, dr$

二、填空题

5. 设 L 为曲线 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \\ z=t \end{cases}$, 介于 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的一段弧, 则 $\int_L \frac{z}{x^2+y^2} \, ds =$ _____
6. 设 $L: \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$, 则 $\oint_L (x^2 + y^2)^n \, ds =$ _____
7. 设在 xOy 面内有一线密度为 $\mu(x,y)$ 的曲线弧 L , 则: 此曲线弧关于 x 轴的转动惯量为 $I_x =$ _____; 关于 y 轴的转动惯量为 $I_y =$ _____; 其质心坐标 $(\bar{x}, \bar{y})$ 中: $\bar{x} =$ _____, $\bar{y} =$ _____

三、计算题

8. 计算 $\int_L (2x - y) \, ds$, 其中 L 为联结点 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 的闭折线

9. 计算 $\oint_L x \, ds$, 其中 L 为由直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成闭区域的整个边界

10. 计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds$, 其中 L 为圆 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 和 x 轴在第一象限所围成扇形的整个边界

11. 计算 $\int_L xyz \, ds$, 其中 L 为曲线弧 $x = t, y = \frac{2}{3\sqrt{2}t^3}, z = \frac{1}{2t^2} \ (0 \leq t \leq 1)$

12. (附加题) 计算 $\oint_L (2y^2 + z^2) \, ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x = y$ 相交的圆

第二节 对坐标的曲线积分

一、选择题

1. 设 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $A(1,1)$ 到点 $B(0,0)$ 的一段弧, 则 $\int_L x \, dy =$ ()

- A. $\int_0^1 2x^2 \, dx$ B. $\int_1^0 x \, dy$
C. $\int_1^0 2x^2 \, dx$ D. $\int_0^1 \sqrt{y} \, dy$

2. 设 L 为从点 $(a,0)$ 到点 $(-a,0)$ 的线段, 则 $\int_L (x + y^2) \, dx =$ ()

- A. $\frac{a^2}{2}$ B. $2a$ C. 1 D. 0

3. 设 L 为抛物线 $2y = x^2$ 上从点 $A(1, \frac{1}{2})$ 到点 $B(2, 2)$ 的一段弧, 则

$$\int_L 2\frac{x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy = (\quad)$$

- A. -3 B. 0 C. $\frac{3}{2}$ D. 3

4. 设 L 为从点 $(0, 0)$ 沿折线 $y = 1 - |x - 1|$ 到点 $A(2, 0)$ 的折线段, 则

$$\int_L -y dx + x dy = (\quad)$$

- A. 0 B. -1 C. 2 D. -2

二、填空题

5. 设 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $A(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧, 则 $\int_L x dy = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 设 L 为曲线 $y = \sqrt{x}$ 上从点 $A(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧, 则将对坐标的曲线积分

$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 化为对弧长的曲线积分是 $\underline{\hspace{2cm}}$

7. 设 L 是上半圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧, 则将对坐标的曲线积分

$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 化为对弧长的曲线积分是 $\underline{\hspace{2cm}}$

8. 在力 $\mathbf{F} = (x, -y, x)$ 的作用下, 质点从点 $(0, 0, 0)$ 沿曲线 $L: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t^2 \end{cases}$ 移至点 $(1, 2, 1)$, 则力 $\mathbf{F}$ 所做的功为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

9. 计算 $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧

10. 计算 $I = \int_{OA} (x^2 - y^2) dx + xy dy$, 其中点 $O(0,0)$, 点 $A(1,1)$, OA 为:

- (1) 直线 $y = x$ 上从点 O 到点 A 的线段; (2) 从点 O 经点 $(1,0)$ 到点 A 的折线段;
- (3) 抛物线 $y = x^2$ 上从点 O 到点 A 的一段弧; (4) 从点 O 经点 $(0,1)$ 到点 A 的折线段

11. 计算 $\int_L (x^2 + 2xy) dx + (x^2 + y^4) dy$, 其中 L 为:

- (1) 沿抛物线 $y = x^2$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧; (2) 沿直线从点 $O(0,0)$ 经点 $B(1,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的折线段; (3) 沿直线从点 $O(0,0)$ 经点 $C(0,1)$ 到点 $A(1,1)$ 的折线段; (4) 沿曲线 $y = \sin(\pi \frac{x}{2})$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧

第三节 格林公式及其应用 (1)

一、选择题

1. 设有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成, L 取正向。若函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则 $\oint_L P \, dx + Q \, dy =$ ()
- A. $\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \, d\sigma$ B. $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \, d\sigma$
C. $\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, d\sigma$ D. $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, d\sigma$
2. 设 $L: x^2 + y^2 = a^2$, 取逆时针方向, 则 $\oint_L xy^2 \, dy - x^2y \, dx =$ ()
- A. $\pi \frac{a^2}{2}$ B. $-\pi \frac{a^4}{2}$ C. $\pi \frac{a^4}{2}$ D. $-\pi a^4$
3. 设面积为 3 的平面有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成, L 取正向, 则 $\oint_L y \, dx + 2 \, dy =$ ()
- A. 3 B. -3
C. -1 D. 无法计算

二、填空题

4. 设 $L: x^2 + y^2 = 9$, 取顺时针方向, 则 $\oint_L (2x - y + 4) \, dx + (5y + 3x - 6) \, dy =$ _____
5. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正向边界, 则 $\oint_L x \, dy - y \, dx =$ _____
6. 设 L 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上从点 $(1, 0)$ 经点 $(0, 1)$ 到点 $(-1, 0)$ 的一段弧, 则 $\int_L e^{y^2} \, dy =$ _____

三、计算题

7. 利用格林公式计算 $\iint_D x \, d\sigma$, 其中 D 是以三点 $O(0,0), A(2,0), B(2,2)$ 为顶点的三角形闭区域

8. 计算 $\oint_L (2xy - x^2) \, dx + (x + y^2) \, dy$, 其中 L 为由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线

9. 计算 $\int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, 其中 L 为圆 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 上从点 $(a, 0)$ 到点 $(0, 0)$ 的上半部分

10. 计算 $\oint_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过坐标原点的连续闭曲线, 取逆时针方向

第三节 格林公式及其应用 (2)

一、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 连续可微且 $f(0) = -2$, $\int_L ((y \sin 2x - yf(x) \tan x) dx + f(x) dy)$ 与路径无关, 则 $f(x) =$ ()
- A. $-\frac{2}{3 \cos^2 x} - \frac{4}{3 \cos x}$ B. $-2 \cos^2 x$
C. $-2 \cos x$ D. $-\frac{2}{3 \cos x} - \frac{4}{3 \cos x}$
2. $\int_L \frac{2x(x^2+y^2)^\alpha}{y dx} - \frac{x^2(x^2+y^2)^\alpha}{y^2 dy}$ 在不与 x 轴相交的区域上与路径无关, 则 $\alpha =$ ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 任意值 D. 0

3. 若 $\int_L (x^2 - 3y) dx + (ax - \sin^2 y) dy$ 与路径无关, 则 $a =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

4. 下列式子中不是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分的是 ()

- A. $(x + 2y) dx + (2x + y) dy$ B. $2xy dx + x^2 dy$
C. $e^y dx + (xe^y - 2y) dy$ D. $(x^2 + y^2) dx + xy dy$

二、填空题

5. 设有函数 $u(x, y)$, 已知 $u(0, 0) = 1$, 且全微分 $du = (2x \cos y - y^\lambda \sin x) dx + (2y \cos x - x^\lambda \sin y) dy$, 则 $\lambda =$ _____, $u(x, y) =$ _____

6. 为使得 $\int_{AB} f(x, y)(y dx + x dy)$ 与路径无关, 则可微函数 $f(x, y)$ 应满足 _____

三、计算题

7. 证明: 曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$ 在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值

8. 验证: $(3x^2y + 8xy^2) dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y) dy$ 在整个 xOy 面内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求出这样的一个 $u(x, y)$

9. 计算 $\int_L e^x \cos y dy + e^x \sin y dx$, 其中 L 为点 $O(0, 0)$ 沿摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 到点 $A(a(\frac{\pi}{2} - 1), a)$ ($a > 0$) 的一段弧

10. (附加题) 设 $Q(x, y)$ 在 xOy 面上有一阶连续偏导数, $\int_L 2xy \, dx + Q(x, y) \, dy$ 与路径无关, 并且对于任意的 t , 有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy \, dx + Q(x, y) \, dy$, 求 $Q(x, y)$

第四节 对面积的曲面积分

一、选择题

1. 设 Σ 为抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 在 xOy 面上方的部分, 则 $\iint_{\Sigma} dS = (\quad)$
 - A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} r \, dr$
 - B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+4r^2} r \, dr$
 - C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2-r^2) \sqrt{1+4r^2} r \, dr$
 - D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} r \, dr$
2. 设有一曲面 Σ , 其面密度为 $\rho(x, y, z)$, 则曲面 Σ 关于 x 轴的转动惯量为 $(\quad)$
 - A. $\iint_{\Sigma} x \, dS$
 - B. $\iint_{\Sigma} x\rho(x, y, z) \, dS$
 - C. $\iint_{\Sigma} x^2 \, dS$
 - D. $\iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dS$

二、填空题

3. 设 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 在 $0 \leq z \leq h$ 之间的部分, 则 $\iint_{\Sigma} dS = \underline{\hspace{2cm}}$, $\iint_{\Sigma} x \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$, $\iint_{\Sigma} x^2 \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 设 Σ 为球面 $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + \frac{z}{2}) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$
5. 设 Σ 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 所截的部分, 则 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

6. 计算 $\iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3y} \right) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限的部分

7. 计算 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在 $z \geq h$ ($0 < h < a$) 的部分

8. 计算 $\iint_{\Sigma} \left(x^2 + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{4z^2} \right) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

9. 求球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的表面积

10. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 已知壳的面密度为 $\rho = z$

第五节 对坐标的曲面积分

一、选择题

1. 设 Σ 为平面 $z = 0$ ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$), 方向向下, 则 $\iint_{\Sigma} \mathrm{d}x \mathrm{d}y =$ ()

- A. 1 B. $\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
C. $-\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ D. 0

2. 设 Σ 为平面 $z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq R^2$) 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y =$ ()

- A. $\iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} R^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \pi R^4$
B. $-\iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} R^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = -\pi R^4$
C. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{2}$
D. 0

二、填空题

3. 设 Σ 为方程 $z = z(x, y)$ 所给曲面的下侧, D_{xy} 为曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy$ 可化为二重积分 _____
4. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy =$ _____
5. 设 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 介于 $1 \leq z \leq 3$ 之间的部分, 其法向量指向 z 轴, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy =$ _____
6. $\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy + x \, dy \, dz + y \, dz \, dx =$ _____, 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所截的在第一卦限部分的前侧
7. 设 Σ 为平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限部分的上侧, 将 $\iint_{\Sigma} R \, dx \, dy + P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx$ 化为对面积的曲面积分是 _____

三、计算题

8. 计算下列对坐标的曲面积分:

- (1) $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z \, dx \, dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部分的下侧; (2) $\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy + x \, dy \, dz + y \, dz \, dx$, 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截的在第一卦限内的部分的前侧; (3) $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] \, dy \, dz + [2f(x, y, z) + y] \, dz \, dx + [f(x, y, z) + z] \, dx \, dy$, 其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧

四、证明题

9. 设 R 是定义在光滑曲面 $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 上的连续函数, 以 S 的上侧为正侧 (S 的法线方向与 z 轴成锐角), 证明:

$$\iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy$$

第六节 高斯公式 通量与散度

一、选择题

1. 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, Σ 是曲面 $y = x^2 + z^2$ 与 $y = 8 - x^2 - z^2$ 所围成立体表面的外侧, 则 $\frac{\iint_{\Sigma} 1}{yf(\frac{x}{y}) \, dy \, dz} + \frac{1}{xf(\frac{x}{y}) \, dz \, dx} + z \, dx \, dy =$ ()
- A. 16π B. -16π
- C. -8π D. 因 $f(u)$ 未知, 故无法确定
2. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy =$ ()
- A. 0 B. $\frac{4}{3\pi a^3}$ C. $4\pi a^3$ D. $\frac{1}{2\pi a^4}$
3. 设流速场 $v = (0, 0, 1)$, 则流过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的通量为 ()
- A. 0 B. $4\pi R^2$ C. $\frac{4}{3\pi R^3}$ D. 1

二、填空题

4. 设 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是光滑闭曲面 Σ 的外法向量的方向余弦, Σ 所围的空间闭区域为 Ω (坐标原点在 Ω 外), 则用高斯公式化曲面积分为重积分时, 有 $\frac{\iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, dS}$
= _____

5. 设 Ω 是由光滑闭曲面 Σ 所围成的空间闭区域, 其体积记为 V , 则沿 Σ 外侧的积分 $\iint_{\Sigma} (z-y) \, dx \, dy + (y-x) \, dz \, dx + (x-z) \, dy \, dz = \underline{\hspace{2cm}}$
6. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$
7. 设空间闭区域 Ω 由曲面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 0$ 所围成, 其中 a 为正整数, 记闭区域 Ω 的表面外侧为 S , Ω 的体积为 V , 则 $\iint_S x^2 y z^2 \, dy \, dz - x y^2 z^2 \, dz \, dx + z(1 + x y z) \, dx \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$
8. 设有向量场 $\mathbf{A} = (x^2 y + y^3)\mathbf{i} + (x^3 - x y^2)\mathbf{j}$, 则 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \underline{\hspace{2cm}}$
9. 向量场 $\mathbf{A} = (x^2 y z, z y^2 x, x y z^2)$ 在点 $M(1, 3, 2)$ 处的散度 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \underline{\hspace{2cm}}$
10. 设函数 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \big|_{(1,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题

11. 求向量场 $\mathbf{A}$ 的散度, 其中 $\mathbf{A} = e^{xy}\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + \cos(xz^2)\mathbf{k}$

12. 利用高斯公式计算下列曲面积分:

- (1) $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ 所围成立体表面的外侧; (2) $\iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧; (3) $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 为介于 $z=0, z=3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 9$ 的整个表面的外侧

13. 求向量场 $\mathbf{A} = (2x + 3z)\mathbf{i} - (xz + y)\mathbf{j} + (y^2 + 2z)\mathbf{k}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量, 其中 Σ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心, 半径 $R = 3$ 的球面, 流向外侧

第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度

一、选择题

1. 设有曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 从 z 轴正向看去为逆时针方向, 则 $\oint_{\Gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz =$ ()
- A. $\sqrt{2}\pi a^2$ B. $-\sqrt{2}\pi a^2$
C. $-\sqrt{3}\pi a^2$ D. $\sqrt{3}\pi a^2$
2. $\oint_L (z-y) \, dx + (x-z) \, dy + (y-x) \, dz =$, 其中 L 为以三点 $A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a)$ 为顶点的三角形边界, 沿 $ABCA$ 的方向 ()
- A. $3a^2$ B. $-3a^2$ C. $\sqrt{3}a^2$ D. $-\sqrt{3}a^2$
3. 若 L 为平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \rho$ 上的闭曲线, 它所包围区域的面积为 S , 则 $\oint_L (\cos \alpha \, dx + \cos \beta \, dy + \cos \gamma \, dz) =$ ()
- A. 0 B. S C. $2S$ D. $\sqrt{2}S$

二、填空题

4. 向量场 $\mathbf{A} = (x+y+z, yx, z)$ 的旋度 $\text{rot } \mathbf{A} =$ _____
5. 设函数 $f(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 则 $\text{rot}(\text{grad } f) =$ _____
6. 设函数 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\text{rot}(\text{grad } u)|_{(1,0,1)} =$ _____
7. 设 L 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向看去为逆时针方向, 则 $\oint_L z \, dx + y \, dz =$ _____
8. 设 L 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向看去为逆时针方向, 则 $\oint_L xz \, dx + x \, dy + \frac{y^2}{2} \, dz =$ _____

三、计算题

9. 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_{\Gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz$, 其中 Γ 为圆 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$, 从 x 轴正向看去为逆时针方向

10. 求向量场 $A = (2z - 3y)\mathbf{i} + (3x - z)\mathbf{j} + (y - 2x)\mathbf{k}$ 的旋度

总习题十一

一、选择题

1. 设 L 为以三点 $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$ 为顶点的三角形边界, 则 $\int_L (x + y) \, ds =$ ()
- A. $\sqrt{2}$ B. $2 + \sqrt{2}$ C. $1 + \sqrt{2}$ D. $1 + 2\sqrt{2}$

2. 设 L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧, $P(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_L P(x, y) \, dx = (\quad)$
- A. $2 \int_0^1 P(x, \sqrt{x}) \, dx$
 B. $2 \int_{-1}^0 P(x, -\sqrt{x}) \, dx$
 C. $\int_0^1 P(x, -\sqrt{x}) \, dx + \int_0^1 P(x, \sqrt{x}) \, dx$
 D. $\int_1^0 P(x, -\sqrt{x}) \, dx + \int_0^1 P(x, \sqrt{x}) \, dx$
3. 设 L 为圆 $x^2 + y^2 = -2x$ 的正向边界, 则 $\oint_L (x^3 - y) \, dx + (x - y^3) \, dy = (\quad)$
- A. -2π B. 0 C. $\frac{3}{2\pi}$ D. 2π
4. 设 Σ 为平面 $2x + 2y + z - 2 = 0$ 被三个坐标面所截的在第一卦限的部分, 则 $\iint_{\Sigma} (2x + 2y + z) \, dS = (\quad)$
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 6
5. 已知 $\frac{(x+ay) \, dx + y \, dy}{(x+y)^2}$ 为某个函数的全微分, 则 $a = (\quad)$
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
6. 设 $\int_L xy^2 \, dx + \psi(y)x \, dy$ 与路径无关, 其中 $\psi(y)$ 具有连续导数, 且 $\psi(0) = 0$, 则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 \, dx + \psi(y)x \, dy = (\quad)$
- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1
7. 设 S 是平面 $x + y + z = 4$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截出的有限部分, 则 $\iint_S y \, dS = (\quad)$
- A. 0 B. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ C. $4\sqrt{3}$ D. π

二、填空题

8. 设 L 为圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 在第一象限的部分, 则 $\int_L xy \, ds = \underline{\hspace{2cm}}$
9. 设 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(1, 1)$ 的一段弧, 则 $\int_L xy \, dx + (y - x) \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 设有一质量分布均匀的曲面 Σ , 在点 (x, y, z) 处的面密度为 $\rho(x, y, z)$, 则该曲面关于 z 轴的转动惯量 $I_z =$ _____
11. 设光滑闭曲面 Σ 围成的空间区域为 Ω , 则利用高斯公式化曲面积为重积分时, 有 $\iint_{\Sigma} xy \, dx \, dy + zx \, dz \, dx + yz \, dy \, dz =$ _____
12. 设 L 为 xOy 面上沿顺时针方向绕行的闭曲线, 且 $\oint_L (x - 2y) \, dx + (4x + 3y) \, dy = -9$, 则 L 所围成平面区域 D 的面积为 _____
13. 设 $(axy^3 - y^2 \cos x) \, dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2) \, dy$ 是某个二元函数 $f(x, y)$ 的全微分, 则 a, b 的值分别为 _____
14. 设 L 为圆 $x^2 + y^2 = 1$, 取顺时针方向, 则 $I_1 = \oint_L x^6 \, ds$ 与 $I_2 = \oint_L y^6 \, ds$ 的大小关系是 _____
15. 设函数 $P(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 V 上具有一阶连续偏导数, Σ 为 V 的光滑边界曲面的外侧, 由高斯公式得 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) \, dy \, dz =$ _____

三、计算题

16. 计算 $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, 其中 L 为圆 $x^2 + y^2 = ax$

第十二章 无穷级数

第一节 常数项级数的概念与性质

一、选择题

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ 的和等于 ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. 下列级数中收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 8^n}{8^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 4^n}{8^n}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{8^n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 4^n}{8^n}$

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ()

- A. 一定收敛
B. 一定发散
C. 可能收敛, 也可能发散
D. 部分和 $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$

4. 下列级数中发散的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^n + (-1)^n)}{4^n}$

二、填空题

5. 级数 $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \dots$ 的一般项是 _____

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, 则 $s_n =$ _____, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =$ _____

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$, 则级数的一般项 $u_n =$ _____, 余项

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k =$ _____

8. 已知数列 (b_n) , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 且 $b_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 的和为 _____

三、计算题

9. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性:

(1) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$

(2) $\sin \frac{\pi}{6} + \sin\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \dots + \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \dots;$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

10. 判定下列级数的敛散性:

(1) $-\frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \dots + (-1)^n \left(\frac{8}{9}\right)^n + \dots;$

(2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3n} + \dots;$

(3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots$

第二节 常数项级数的审敛法 (1)

一、选择题

1. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 下列命题中错误的是 ()

- A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
- B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散
- C. 若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
- D. 若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性, 下列说法正确的是 ()

- A. 因为 $1 + \frac{1}{n} > 0$, 所以此级数收敛
- B. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = 0$, 所以此级数收敛
- C. 因为 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} > \frac{1}{n}$, 所以此级数发散
- D. 以上说法均不对

二、填空题

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^{\alpha}}$ 收敛的充要条件是 α 满足条件 _____

4. 当 p 满足条件 _____ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且其部分和数列为 s_n , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是 _____

三、计算题

6. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的敛散性:

(1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots;$

(2) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \dots;$

(3) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + \dots;$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$

7. 用比值审敛法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

8. 用根值审敛法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, a_n, b, a 均为正数

第二节 常数项级数的审敛法 (2)

一、判断题

1. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛 ()

2. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$ ()

二、选择题

3. 下列级数中, 条件收敛的是 ()

A. $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n}{n+1}$

B. $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{2}}{n^2}$

C. $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2}{\sqrt{n}}$

D. $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 1}{n^{\frac{4}{3}}}$

4. 下列级数中, 收敛的是 ()

A. $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n \sqrt[n]{n}}$

B. $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)}{n(n+2)}$

C. $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 3^n}{n \cdot 2^n}$

D. $\frac{\sum_{n=2}^{\infty} 4}{(n-1)(n+3)}$

三、填空题

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛的含义是 _____

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛的含义是 _____

四、计算题

7. 判定下列级数的敛散性:

(1) $\frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \dots + \frac{n^4}{n!} + \dots;$

(2) $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)}{n(n+2)};$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right);$

(4) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots$

8. 判定下列级数的敛散性, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛:

(1) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dots;$

(2) $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n}{3^{n-1}}$

第三节 幂级数

一、判断题

1. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在点 $x = -1$ 处收敛, 则在点 $x = 2$ 处必收敛 ()

2. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2^n} x^{2n+1}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$ ()

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a, R_b , 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min(R_a, R_b)$ ()

二、选择题

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^n - b^n)}{(a^n + b^n) x^n}$ ($0 < a < b$), 则幂级数的收敛半径 R 为 ()

- A. b B. $\frac{1}{a}$
C. $\frac{1}{b}$ D. 与 a, b 无关

5. 当常数 $p > 0$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right) x^n$ 在其收敛区间的右端点处 ()

- A. 条件收敛
B. 绝对收敛
C. 发散
D. $p \leq 1$ 时条件收敛, $p > 1$ 时绝对收敛

三、填空题

6. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在点 $x = -4$ 处收敛, 在点 $x = 6$ 处发散, 则当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的敛散情况是 _____

7. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = 2$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ 的收敛半径为 _____

8. 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数为 _____

四、计算题

9. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) 1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n^2} + \dots;$$

$$(2) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(3) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (x-5)^n}{\sqrt{n}}$$

10. 利用逐项求导或逐项积分, 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1};$$

$$(2) \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1}}{4n+1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3}$$

第四节 函数展开成幂级数

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数为 ()
A. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}$
C. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$ D. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2}$
2. 函数 $f(x) = \frac{1}{a+bx}$ 展开成 $(x-x_0)$ ($a+bx_0 \neq 0, ab \neq 0$) 的幂级数为 ()
A. $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^n}{(a+bx_0)^{n+1} (x-x_0)^n}$
B. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a+bx_0}\right)^n (x-x_0)^n$
C. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b}{a+bx_0}\right)^n (x-x_0)^n$
D. $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-b)^n}{(a+bx_0)^{n+1} (x-x_0)^n}$
3. 函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 展开成 x 的幂级数为 ()
A. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$
C. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ D. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$
4. $f^n(0)$ 存在 ($n = 1, 2, \dots$) 是函数 $f(x)$ 可展开成 x 的幂级数的 ()
A. 充要条件 B. 充分条件
C. 必要条件 D. 无关条件

二、填空题

5. 若函数 $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$ 展开成 x 的幂级数, 其收敛半径 $R =$ _____
6. 函数 $f(x) = \ln(2+x)$ 关于 x 的幂级数展开式为 _____, 其收敛域为 _____
7. 设函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则 $g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的麦克劳林级数展开式为 _____
8. 若 $\frac{1}{3+x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ ($|x-1| < 4$), 则 $a_n =$ _____
9. 若函数 $\ln(4-9x^2)$ 展开成 x 的幂级数, 其收敛半径 $R =$ _____

三、计算题

10. 将函数 $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间

11. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $(x + \frac{\pi}{3})$ 的幂级数

12. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数

第五节 傅里叶级数

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 。已知 $f(x)$ 的傅里叶级数, 则该级数的和函数为 ()
- A. $S(x) = f(x), x \in (-\pi, \pi)$
B. $S(x) = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$
C. $S(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq k\pi \\ \frac{\pi}{2} & x = k\pi \end{cases} (k \text{ 为整数})$
D. $S(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq (2k-1)\pi \\ \frac{\pi}{2} & x = (2k-1)\pi \end{cases} (k \text{ 为整数})$
2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 。 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(\pi) =$ ()
- A. $-\frac{\pi}{2}$ B. $-\pi$ C. 0 D. 其他值
3. 函数 $f(x) = |\sin x| (-\pi \leq x \leq \pi)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 满足 ()
- A. $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots), b_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$
B. $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots), a_{2k+1} = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$
C. $a_n \neq 0 (n = 0, 1, 2, \dots), b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$
D. 以上结论都不对
4. 利用函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数展开式可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$ ()
- A. $\frac{\pi^2}{3}$ B. $\frac{\pi^2}{6}$ C. $\frac{\pi^2}{9}$ D. $\frac{\pi^2}{12}$

二、填空题

5. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 。则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x = \pi$ 处收敛于 _____
6. 设函数 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$, 且其傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则 $b_3 =$ _____
7. 已知函数 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛条件, 其傅里叶级数的和函数为 $S(x)$, 且 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处左连续, $f(0^-) = -1, S(0) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ _____

8. 设函数 $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的余弦级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(-3) =$ _____

9. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 其傅里叶系数为 a_n, b_n 。若函数 $g(x) = f(-x)$, 则 $g(x)$ 的傅里叶系数 a_n^*, b_n^* 与 a_n, b_n 的关系为 _____

三、计算题

10. 将函数 $f(x) = \pi - \frac{x}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数

11. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在区间 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = 3x^2 + 1$, 试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数

12. 设 $f(x) = xe^x$, $x \in [-\pi, \pi]$ 。求该函数的傅里叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于何值?

第六节 一般周期函数的傅里叶级数

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi x}{l}) & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$ 展开成余弦级数时, 应对 $f(x)$ 进行 ()

- A. 周期为 $2l$ 的延拓 B. 偶延拓
C. 周期为 l 的延拓 D. 奇延拓

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & -3 \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 3 \end{cases}$ 展开成傅里叶级数时, 应 ()

- A. 在区间 $[-3, 3)$ 外进行周期延拓, 级数在区间 $(-3, 0) \cup (0, 3)$ 内收敛于 $f(x)$
B. 进行奇延拓, 级数在区间 $(-3, 0) \cup (0, 3)$ 内收敛于 $f(x)$
C. 进行偶延拓, 级数在区间 $[-3, 3]$ 上收敛于 $f(x)$
D. 在区间 $[-3, 3)$ 外进行周期延拓, 级数在区间 $(-3, 3)$ 上收敛于 $f(x)$, 且在端点处收敛于均值。

二、填空题

3. 将函数 $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 在 $[0, 2]$ 上展开成余弦级数, 其和函数在 $x = 1$ 处的值为

三、计算题

4. 将函数 $f(x) = x$ ($0 < x < 2$) 展开成正弦级数

总习题十二

一、判断题

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ()
2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散 ()
3. 级数加括号后不改变其敛散性 ()
4. 正项级数收敛的充要条件是前 n 项和构成的数列 s_n 有界 ()
5. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 也收敛 ()
6. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ ($0 < l < +\infty$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性 ()

二、选择题

7. 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ()
A. 必同时收敛 B. 必同时发散
C. 可能同时发散 D. 不可能同时收敛
8. 在正项级数中, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛的 ()
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 无关条件

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为任意项级数, 若 $|a_n| > |a_{n+1}|$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则该级数 ()

- A. 条件收敛 B. 绝对收敛
C. 发散 D. 敛散性不确定 (符号未定)

10. 若函数 $y = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{(n!)^2}$, 则 $xy'' + y' =$ ()

- A. y B. $2y$ C. $\frac{y}{4}$ D. 0

11. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在点 $x = -1$ 处收敛, 则该级数在点 $x = 2$ 处 ()

- A. 发散 B. 条件收敛
C. 绝对收敛 D. 敛散性不确定

12. 级数 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \dots$ 的和为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

三、填空题

13. 幂级数 $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{n!}$ 的收敛区间为 _____

14. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 当 a 满足条件 _____ 时收敛

15. 幂级数 $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{3n-1}}{n \cdot 8^n}$ 的收敛域为 _____

16. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 2)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n =$ _____

17. 幂级数 $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{3^n + (-2)^n + 3 \cdot 2^n}$ 的收敛半径 $R =$ _____

18. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x+2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 。则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x = 0$ 处收敛于 _____

四、计算题

19. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{n \cdot 2^n} x^n$ ($|x| < 1$) 在收敛区间内的和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{n \cdot 2^n}$ 的和

模拟卷与真题

高等数学(上册)期末测试模拟卷(一)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列是 x 的同阶 (不等价) 无穷小的是 ()

- A. $\sin x - x$ B. $\ln(1 - x)$
C. $x^2 \sin x$ D. $e^x - 1$

2. 下列命题中不正确的是 ()

- A. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处必不可导
B. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续
C. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处必可微
D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必连续

3. 设函数 $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

- A. 跳跃间断点 B. 可去间断点
C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

4. 下列不定积分的计算不正确的是 ()

- A. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$
B. $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \arctan(x-1) + C$
C. $\int 2^x \cdot 3^x dx = \frac{2^x \cdot 3^x}{\ln 2 + \ln 3} + C$
D. $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

5. 下列反常积分收敛的是 ()

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ B. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$
C. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ D. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{\ln(1+x)} & -1 < x < 0 \\ a \sec x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____

7. 已知参数方程 $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \arctan t$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____

8. 函数 $f(x) = xe^x$ 的带有拉格朗日余项的三阶麦克劳林公式为_____

9. 曲线 $y = 4x - x^2$ 在其顶点处的曲率 $k =$ _____

10. $\int_{-2}^2 \frac{x|\sin x| + 4 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx =$ _____

11. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x$ 的通解为_____

三、计算题 (12~15 题每小题 7 分, 16~17 题每小题 8 分, 共 44 分)

12. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \arctan^2 t dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

13. 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 所确定, 求 $y''(1)$

14. 求 $\int \arctan \sqrt{x} \, dx$

15. 求 $\int_0^\pi x^2 |\cos x| \, dx$

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2) \, dx$

17. 求曲线 $y = x^4(12\ln x - 7)$ 的凹凸区间及拐点

四、应用题（每小题 9 分，共 18 分）

18. 要做一个容积为 2π 的密闭圆柱形罐头筒，问：半径和高分别为多少时能使所用材料最省？

19. 求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成图形的面积，并求此图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

五、证明题 (5 分)

20. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有二阶导数且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$

高等数学(上册)期末测试模拟卷(二)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列是 x 的三阶无穷小的是 ()
- A. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$ B. $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a}$ ($a > 0$ 为常数)
- C. $x^3 + 0.0001x^2$ D. $\sqrt[3]{\tan x}$
2. 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则下列正确的是 ()
- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 不是极值, $(0, f(0))$ 也不是拐点
3. 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{x(x-1)(x-\pi)}$ 的无穷间断点的个数为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 下列不定积分的计算不正确的是 ()

A. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$

B. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \arctan(x+1) + C$

C. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

D. $\int 2^x \cdot 3^x dx = \frac{2^x \cdot 3^x}{\ln 2 + \ln 3} + C$

5. 下列方程中为一阶线性微分方程的是 ()

A. $y' + xy^2 = e^x$

B. $yy' + xy = e^x$

C. $y' = \cos y + x$

D. $y' = x + y \sin x$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + \frac{\sin(ax)}{x} & x > 0 \\ e^x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ 要使得 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____

7. 曲线 $x = e^t + \ln(1+t^2)$, $y = \arctan t$ 在点 $t = 0$ 处的切线方程为 _____

8. 函数 $f(x) = 2^x$ 的带有拉格朗日余项的三阶麦克劳林公式为 _____

9. 曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 (x, y) 处的曲率为 _____

10. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x + 1 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____

11. 微分方程 $(1+y)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0$ 的通解为 _____

三、计算题 (12~15 题每小题 7 分, 16~17 题每小题 8 分, 共 44 分)

12. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}$

13. 已知函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^y + xy - 2x - 1 = 0$ 所确定, 求 $y''(0)$

14. 求 $\int e^{\sqrt{x}} dx$

15. 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^1 x f(x) dx$

17. 求曲线 $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间及拐点

四、应用题（每小题 9 分，共 18 分）

18. 要造一个长方体无盖蓄水池，其容积为 500 m^3 ，底面为正方形。设底面与四壁所使用材料的单位造价相同，问：底边和高分别为多少时，才能使所用材料费最省？

19. 求由曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 、直线 $x = 4$ 及 x 轴所围成图形的面积, 并求此图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

五、证明题 (5 分)

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明: 必存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $2f(\xi) = -\xi f'(\xi)$

高等数学(上册)期末测试真题(一)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{2x}\right)^x = e^3$, 则 $k =$ ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. 6 C. $\frac{3}{2}$ D. 不存在

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}$ 是 $(1 + \cos x) \ln(1 + x)$ 的 ()
- A. 高阶无穷小
B. 等价无穷小
C. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小
D. 低阶无穷小
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & x < 0 \\ (1+x)^x & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()
- A. 跳跃间断点 B. 可去间断点
C. 连续点 D. 第二类间断点
4. 方程 $x^4 - 4x = 1$ 在区间 $(0, 1)$ 内 ()
- A. 无实根 B. 有唯一实根
C. 有两个实根 D. 有三个实根
5. 设 $f'(x) = g(x)$, 则 $\frac{d}{dx} f(\sin^2 x) = ()$
- A. $2g(x) \sin x$ B. $g(x) \sin 2x$
C. $g(\sin^2 x)$ D. $g(\sin^2 x) \sin 2x$
6. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\cos x} = 1$, 则 ()
- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
D. $f(0)$ 不是极值, $(0, f(0))$ 也不是拐点

7. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 其部分图形如图 1 所示, 试确定下列定积分的符号:

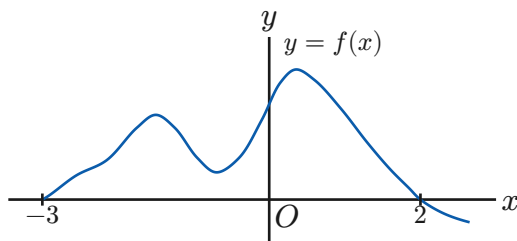


图 1

(1) $\int_{-3}^2 f(x) \, dx$;

(2) $\int_{-3}^2 f'(x) \, dx$;

(3) $\int_{-3}^2 f''(x) \, dx$;

(4) $\int_{-3}^2 f'''(x) \, dx$.

8. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的特解, C_1, C_2 是任意常数, 则该非齐次微分方程的通解是 ()

A. $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$

B. $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$

C. $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$

D. $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

9. 由曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = \ln a$ 、 $y = \ln b$ ($b > a > 0$) 及 y 轴 所围成图形的面积为 ()

A. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

B. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

C. $b - a$

D. $a - b$

10. 下列反常积分收敛的是 ()

A. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx$

B. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \, dx$

C. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

D. $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ _____

12. 曲线 $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \arctan t - 2$ 在点 $t = 2$ 处的切线方程为 $y =$ _____

13. 设函数 $f(x) = k \tan 2x$ 的一个原函数为 $-\ln \cos 2x$, 则 $k =$ _____

14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$ _____

15. $\int_{-1}^1 \frac{2x^2+x\sin^2 x}{1+\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____

16. 曲线 $y = x^4(12 \ln x - 7)$ 的拐点为_____

三、计算题 (每小题 7 分, 共 35 分)

17. 已知连续函数 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$

18. 已知 $f(\pi) = 1$, 函数 $f(x)$ 二阶连续可微, 且 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 3$, 求 $f(0)$

19. 求微分方程 $y'' - y' = 4xe^x$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$ 的特解

20. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^4 - xy - ye^x = 1$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$

21. 求 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

四、应用题 (10 分)

22. 如图 2 所示, 由抛物线 $y = 2x^2$ 与直线 $x = a$ 、 $x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_1 , 由抛物线 $y = 2x^2$ 与直线 $x = a$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_2 , 其中 $0 < a < 2$

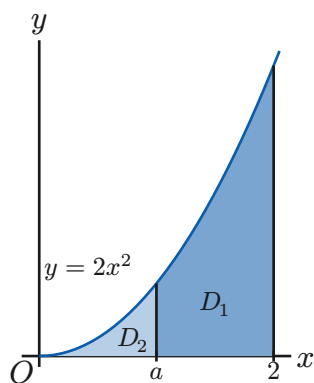


图 2

- (1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_1 ;
- (2) 试求 D_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_2 ;
- (3) 问: 当 a 为何值时, $V = V_1 + V_2$ 取得最大值? 并求出该最大值。

五、选答题（7分）（考生可从下面2个题中任选1个作答，多做不多得分）

23. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，又 $f'(x) > 0$ ，且极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a} \text{ 存在，证明：在 } (a, b) \text{ 内存在一点 } \xi, \text{ 使得 } \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x) \, dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

24. 证明：当 $x > 0$ 时， $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

高等数学(上册)期末测试真题(二)

一、选择题（每小题3分，共30分）

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2} = 1$ (a, b 为常数)，则 ()

- A. $a = 0, b \in \mathbb{R}$ B. $a = 0, b = 1$
C. $a \in \mathbb{R}, b = 1$ D. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

2. 当 $x \rightarrow \infty$ 时， $x \cos x$ 是 ()

- A. 无穷小 B. 无穷大
C. 有界但不是无穷小 D. 无界但不是无穷大

3. 设函数 $y = e^{2x-1}$, 则 $y^{(20)}(1) = (\quad)$
- A. $2^{20}e$ B. $2^{20}e^{-1}$ C. 2^{20} D. e
4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 是 $x - \sin x$ 的同阶无穷小的是 $(\quad)$
- A. $x + \tan x$ B. $x \tan x$
C. $x^2 + \tan x$ D. $x^2 \tan x$
5. $x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{\ln x}{|x-1|}$ 的 $(\quad)$
- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷间断点 D. 振荡间断点
6. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, Δx 为自变量在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分. 若 $\Delta x > 0$, 则 $(\quad)$
- A. $0 < dy < \Delta y$ B. $0 < \Delta y < dy$
C. $\Delta y < dy < 0$ D. $dy < \Delta y < 0$
7. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^{-x} , 则 $f'(x) = (\quad)$
- A. xe^{-x} B. $(1-x)e^{-x}$
C. $(2+x)e^{-x}$ D. $(-2+x)e^{-x}$
8. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0} = a$ ($a < 0$), 则 $(\quad)$
- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
C. 在点 x_0 的某邻域内 $f(x)$ 单调增加
D. 在点 x_0 的某邻域内 $f(x)$ 单调减少
9. 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_4^{2x} f(\frac{t}{2}) dt = (\quad)$
- A. $f(2)$ B. $f(1)$ C. $2f(2)$ D. $2f(1)$

10. 如果连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = 2 \int_0^x f(t) \, dt + \ln 2$, 则 $f(x) =$ ()

A. $e^x \ln 2$

B. $e^{2x} \ln 2$

C. $e^x + \ln 2$

D. $e^{2x} + \ln 2$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\ln x} =$ _____

12. 若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-f(1)}{h} = 6$, 则 $f'(1) =$ _____

13. $\int_{-1}^1 (x^2 + \sqrt{4-x^2} \cdot \sin x) \, dx =$ _____

14. 设参数方程 $x = f(t) - \pi$, $y = f(e^{2t} - 1)$, 函数 f 可导且 $f'(0) \neq 0$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{t=0} =$ _____

15. 曲线 $y = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2$ 在其拐点处的切线方程是 _____

16. 微分方程 $y' = \frac{1}{x+y}$ 的通解为 _____

三、计算题 (每小题 7 分, 共 35 分)

17. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan 3x)^{\frac{1}{2 \ln x}}$

18. 求 $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}} \mathrm{d} x$

19. 求微分方程 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$ 的通解

20. 求 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \mathrm{d} x$

21. 求函数 $f(x) = (2x + 3)e^{\frac{2}{x}}$ 的单调区间、极值以及渐近线方程

四、应用题 (10 分)

22. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内大于零, 且满足 $xf'(x) = f(x) - 3x^2$, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $y = 0$ 所围成图形 D 的面积为 2。求:

(1) 函数 $f(x)$;

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

五、选答题（7分）（考生可从下面2个题中任选1个作答，多做不多得分）

23. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且满足 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;
- (2) 存在不同的 $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2) = 1$ 。

三、计算题

24. 已知 $y = f(x)$ 是由方程 $x \cos y + \sin x + e^y = 1$ 所确定的隐函数，求:

- (1) $\frac{dy}{dx}$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right]^{\frac{1}{x}}$ 。

高等数学(下册)期末测试模拟卷(一)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不一定 ()
A. 连续 B. 偏导数存在
C. 偏导数连续 D. 曲面 $z = f(x, y)$ 的切平面存在
2. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t \mathrm{d} y \int_y^t f(x) \mathrm{d} x$, 则 $F'(2) =$ ()
A. $2f(2)$ B. $f(2)$ C. $-f(2)$ D. 0
3. 将 xOy 面上的双曲线 $\frac{x^2}{3} - 4y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 ()
A. $\frac{x^2}{3} - 4y^2 - 4z^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - 4y^2 + 4z^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} - 4z^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - 4y^2 + \frac{z^2}{3} = 1$
4. 设 $L: x^2 + y^2 = 1$, 取顺时针方向, 则 $\oint_L \frac{x \mathrm{d} y - y \mathrm{d} x}{x^2 + y^2} =$ ()
A. 0 B. 2π C. -2π D. π
5. 下列级数中, 条件收敛的是 ()
A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知 $|a| = 2$, $|b| = \sqrt{2}$, 且 $a \cdot b = 2$, 则 $|a \times b| =$ _____
7. 函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数为_____
8. 曲面 $x^2 + 2y^2 + z - xe^z = 4$ 在点 $(0, 1, 2)$ 处的切平面方程为_____
9. 设曲面 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, 则 $\iint_{\Sigma} (y + 1) \mathrm{d} S =$ _____
10. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} 1-x & -\pi \leq x < 0 \\ 1+x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数, 则 $S(-3\pi) =$ _____

三、计算题 (11~12 每小题 6 分, 13~17 每小题 7 分, 18 小题 8 分, 19 小题 10 分, 20 小题 5 分, 共 70 分)

11. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = (4 - 2x) dx - (2y + 4) dy$, 试确定 $f(x, y)$ 的极值点, 并判别该点是极大值点还是极小值点

12. 计算 $\iint_D \cos \frac{x}{y} dx dy$, 其中 D 为由直线 $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \pi$ 及抛物线 $x = y^2$ 所围成的平面区域

13. 设函数 $z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 $\mathrm{d} z$

14. 求曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2+z^2=10 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的切线方程

15. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 求

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y$$

16. 计算 $\oint_L (y^2 + x) \, ds$, 其中 L 为圆 $x^2 + y^2 = 4$

17. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成 $(x - 1)$ 的幂级数

18. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内以点 (a, b) 为起点、点 (c, d) 为终点的有向分段光滑曲线, 记

$$I = \int_L \left[\frac{1}{y} + yf(xy) \right] dx + \left[xf(xy) - \frac{x}{y^2} \right] dy$$

(1) 证明: 曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 计算 I 的值。

19. 计算 $I = \iint_{\Sigma} [f_y(x, y) + x^3] dy dz + [y^3 - f_x(x, y)] dz dx + z^3 dx dy$, 其中 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧

20. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 且 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0,$
 $a_{n+2} = \frac{2}{(n+1)} a_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 求该级数的和函数 $S(x)$

高等数学(下册)期末测试模拟卷(二)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 设有直线 $l: \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-2y-3z=2 \end{cases}$ 及平面 $\Pi: 11x - 5y + 7z = 2$, 则直线 l ()
 A. 与平面 Π 斜交 B. 垂直于平面 Π
 C. 平行于平面 Π D. 在平面 Π 上
- 函数 $z = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 的极值点为 ()
 A. $(0, 0)$ B. $(1, 1)$
 C. $(0, 0)$ 与 $(1, 1)$ D. 无极值点
- 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则在点 $(0, 0)$ 处 ()
 A. 偏导数不存在, 函数不连续 B. 偏导数不存在, 函数连续
 C. 偏导数存在, 函数连续 D. 偏导数存在, 函数不连续
- 设曲面 Σ 的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$), Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分, 则下列选项中正确的是 ()
 A. $\iint_{\Sigma} x \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS$ B. $\iint_{\Sigma} y \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y \, dS$
 C. $\iint_{\Sigma} z \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z \, dS$ D. $\iint_{\Sigma} xyz \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz \, dS$

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^4}$ 是 ()

- A. 条件收敛级数 B. 绝对收敛级数
C. 发散级数 D. 敛散性不确定的级数

二、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

6. 已知直线 $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ 与 $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{a} = \frac{z+1}{-2}$ 相互垂直, 则 $a =$ _____

7. 点 $M(1, 0, -1)$ 在平面 $x + 2y + z = 12$ 上的投影点的坐标为 _____

8. 设函数 f 可微, $z = f(x + y, xy)$ 在点 (x, y) 处的全微分 $dz =$ _____

9. 函数 $u = xy^2 + z^3 - x^2yz$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 处的最大方向导数为 _____

10. 设 $I = \iiint_{\Omega} \frac{dv}{1+x^2+y^2}$, 其中空间闭区域 Ω 由 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = 1$ 围成, 则 I 在柱面坐标系下的三次积分为 (不用计算) _____

11. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_0^t dy \int_y^t f(x) dx$ ($t > 0$), 将 $F(t)$ 交换积分次序后有 _____

12. 设 L 是直线 $3x + 4y = 12$ ($0 \leq x \leq 4$) 的一段, 则 $\int_L (3x + 4y) ds =$ _____

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在区间 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数 $S(x)$ 在点 $x = \frac{5\pi}{2}$ 处的值为 _____

三、计算题 (14~17 每小题 8 分, 18~19 每小题 10 分, 共 52 分)

14. 求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的法平面方程

15. 设函数 $z = f(x, y)$ 是由方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 φ 具有一阶连续偏导数, 求 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}$ (a, b, c 是常数)

16. 计算 $\iint_D ye^{xy} \, d\sigma$, 其中闭区域 $D: \frac{1}{x} \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq 2$

17. 计算 $\int_L (3\sin x + 2xy - 4x) \, dx + (x^2 - e^y) \, dy$, 其中 L 为摆线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ 上从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(\pi, 2)$ 的一段弧

18. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{n} x^n$ 的收敛半径、收敛域及和函数

19. 计算 $I = \iint_{\Sigma} xz^2 \, dy \, dz + (x^2y - z^3) \, dz \, dx + (2xy + y^2z) \, dx \, dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 上半部分的上侧

四、应用题 (9 分)

20. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转一周构成一个圆柱体, 问: 矩形的长、宽分别为多少时, 可使得圆柱体体积最大?

高等数学(下册)期末测试真题(一)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 下列四个平面中, 通过坐标原点且与 x 轴平行的是 ()
A. $2x + 2y = 0$ B. $3x + 2z + 1 = 0$
C. $3x + 2z = 0$ D. $3y + 2z = 0$
2. 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 在点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标为 ()
A. $(1, -1, 2)$ B. $(-1, 1, 2)$
C. $(-1, -1, 2)$ D. $(1, 1, 2)$
3. 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度为 ()
A. $-i$ B. i C. $-j$ D. j
4. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处 ()
A. 不连续, 偏导数存在 B. 连续, 偏导数存在
C. 连续, 偏导数不存在 D. 不连续, 偏导数不存在
5. 函数 $z = x^3 - 3x + y^2$ 在点 $(1, 0)$ 处 ()
A. 取得极大值 B. 取得极小值
C. 不取得极值 D. 不确定是否取得极值
6. 设函数 $z = (1 + xy)^{x+y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,1)} =$ ()
A. $27(\ln 3 + 2)$ B. 27
C. $27 \ln 3$ D. $27(\ln 3 + 1)$
7. 设曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$) 的外法向量的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则 $\iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS =$ ()
A. πR^3 B. $2\pi R^3$ C. $3\pi R^3$ D. $4\pi R^3$

8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的和函数是 $S(x) = (\quad)$

- A. e^{-x^2} B. e^{x^2} C. $-e^{-x^2}$ D. $-e^{x^2}$

9. 设空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dv = (\quad)$

- A. $\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sin \varphi \, d\rho$
C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sin \theta \, d\rho$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sin \varphi \, d\rho$

10. 当 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ ($s > 1$) ($\quad$)

- A. 条件收敛 B. 绝对收敛
C. 发散 D. 敛散性不确定

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. 设 $|a| = 1$, $|b| = \sqrt{5}$, 且 $|a + b| = |a - b|$, 则 $|2a - 3b| = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos z = 2$ 所确定, 则全微分 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

13. $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 $\underline{\hspace{2cm}}$

15. 设函数 $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) \, dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$, 则 $S(-2021) = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 设 $L: |x| + |y| = 1$, 则 $\oint_L \frac{ds}{|x| + |y|} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (17~21 每小题 7 分, 22 小题 9 分, 共 44 分)

17. 求过直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ 且平行于直线 $L_2: \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2 \\ z=t-3 \end{cases}$ 的平面方程

18. 设函数 $z = f(2x - y, y \sin x)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

19. 计算 $\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy$, 其中闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$

20. 计算 $\int_L (xe^y - 2y) \, dy + (e^y + x - y) \, dx$, 其中 L 为圆 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 的上半部分, 取逆时针方向

21. 计算 $\iint_{\Sigma} x \, dy \, dz - y \, dz \, dx + (z^2 + x) \, dx \, dy$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的下侧

22. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$, 求该幂级数的

(1) 收敛半径;

(2) 收敛域;

(3) 和函数。

四、选答题 (8 分, 二选一)

23. 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使得函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点处沿方向 $l = \{1, -1, 0\}$ 的方向导数最大

24. 设有一凤凰山, 底面区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$, 高度 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$. 欲寻找山脚坡度最大的点作为攀爬起点, 试确定攀爬起点的位置

高等数学(下册)期末测试真题(二)

一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}$ ()
A. 绝对收敛 B. 条件收敛
C. 发散 D. 敛散性不确定
2. 直线 $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 与平面 $4x-2y+z-2=0$ 的位置关系是 ()
A. 直线在平面内 B. 平行但不在平面内
C. 垂直 D. 相交但不垂直
3. 设 $L: 4x^2 + y^2 = 1$, 取正向, 则 $\oint_L \frac{-y \, dx + x \, dy}{4x^2 + y^2} =$ ()
A. -2π B. 2π C. 0 D. π
4. 设函数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 则 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ ()
A. 不存在 B. 0 C. 1 D. 无穷大

5. $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_2^{\sqrt{8}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy$ 交换积分次序后为 ()

A. $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{8-y^2}}^2 f(x, y) dx$

B. $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

C. $\int_0^4 dy \int_y^2 f(x, y) dx$

D. $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

6. 已知 $|a| = 4$, 向量 a 与轴 u 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 则 $\text{Prj}_u a =$ _____

7. 曲面 $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ 在点 $(1, 2, -1)$ 处的切平面方程是 _____

8. 平面曲线 $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$ ($1 \leq y \leq e$) 的弧长为 _____

9. 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处从点 A 到点 $B(3, -2, 2)$ 的方向导数为 _____

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 1-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{2})$ 是其傅里叶级数, 则 $S(7) =$ _____

三、计算题 (11~15 每小题 7 分, 16~17 每小题 9 分, 18 小题 7 分, 共 60 分)

11. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 D 是由中心在坐标原点、半径为 R 的圆所围成的闭区域

12. 求过点 $M(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直的直线方程

13. 设函数 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g(x^2 - y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

14. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值

15. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(x-1)^n$, 求其收敛域及和函数

16. 计算 $\iint_{\Sigma} x^3 \, dy \, dz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] \, dz \, dx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] \, dx \, dy$, 其中 f 具有一阶连续导数, Σ 为锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围立体表面的外侧

17. 计算 $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x) \, dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) \, dy$, 其中 L 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧

四、证明题

18. 设函数 $f(x, y) = |x - y| g(x, y)$, 其中函数 $g(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内连续。试讨论 f 在 $(0, 0)$ 处的偏导数与可微性 (提示: 与 $g(0, 0)$ 是否为 0 有关)

